SUPREMUMEGENSKAPEN MM

En mängd $X \subset \mathbb{R}$ är *uppåt begränsad* om det finns ett tal m sådant att $X \subset]-\infty, m]$, eller med andra ord, att varje x i X är mindre eller lika med m. Ett sådant tal m kallas en *majorant* till X.

(SE) Varje icketom uppåt begränsad mängd $X \subset \mathbb{R}$ har en minsta majorant.

Detta kallas supremumegenskapen, eller ibland supremumaxiomet, och och kan användas som utgångspunkt istället för egenskapen (1) i PB.

Den minsta majoranten kallas *supremum* av X och betecknas $\sup X$. (Om X är obegränsad uppåt kan man skriva $\sup X = \infty$.) Moraliskt är $\sup X$ "det största" talet i X, fast ofta ingår detta tal inte i X.

Example 1. Låt $X = \{x;\ x < 1\}$. Då är $\sup X = 1$. Om $X = \{x;\ x \leq 1\}$ så är också $\sup X = 1$. $\square$

Example 2. Låt $X = \{x;\ x^2 < 2\}$. Då är $\sup X = \sqrt{2}$. $\square$

Example 3. Om a_k är en växande (uppåt begränsad) talföljd så är $\sup\{a_k\} = \lim a_k$. Se övning 1. $\square$

Det är lätt att se att $\mu = \sup X$ om och endast om μ är en majorant och det finns $x_k \in X$ s.a. $x_k \to \mu$.

(Obs att x_k inte behöver vara *olika* tal. Om tex $X = \{1\}$ så kommer x_k att vara 1 för alla k.)

Bevis: Antag att $\mu = \sup X$. För varje k finns $x_k \in X$ s.a. $x_k > \mu - 1/k$, ty annars skulle ju $\mu - 1/k$ vara en majorant som är mindre än μ. Eftersom nu $\mu - 1/k < x_k \leq \mu$ följer att $x_k \to \mu$. Omvänt, antag μ majorant och x_k finns. Om γ är en majorant till X har vi att $x_k \leq \gamma$. Eftersom $x_k \to \mu$ så är då $\mu \leq \gamma$. Alltså är μ den minsta majoranten till X.

Bevis av (SE) utifrån (1) i appendix C i PB. Eftersom $X \neq \emptyset$ så finns $a \in X$. Eftersom X uppåt begränsad så finns majorant b. Sätt $I_0 = [a, b]$.

Låt c_0 vara mittpunkten på I_0. Om c_0 är en majorant till X så låt I_1 vara vänstra halvan av I_0. Om inte låt I_0 vara högra halvan av I_0. Då kommer $I_1 = [a_1, b_1]$ ha egenskapen att b_1 är en majorant till X och det finns $x_1 \in [a_1, b_1]$ s.a. $x_1 \in X$. Genom att fortsätta så får vi intervall $I_k = [a_k, b_k]$ och $x_k \in I_k$ s.a. b_k är majorant till X och $x_k \in X$.

Låt nu $m = \lim a_k = \lim b_k$ (jmf beviset av sats 1 i appendix C i PB). Tag godtyckligt $x \in X$. Då har vi att $x \leq b_k$ för alla k och därför $x \leq m$. Alltså är $x \leq m$ för alla $x \in X$, dvs m är en majorant till X.

Eftersom $a_k \leq x_k \leq b_k$ så har vi att $x_k \to m$. Men $x_k \in X$ så m måste vara den minsta majoranten till X. $\square$

Vi säger att en funktion f definierad på en mängd D är uppåt begränsad om det finns ett tal M s.a. $f(x) \leq M$ för alla $x \in D$. Notera att detta precis betyder att $V_f = \{f(x);\ x \in D_f\}$ är en uppåt begränsad mängd. Enligt (SE) har alltså då V_f ett supremum. Man skriver ofta detta som

$$\sup_D f.$$

Example 4. Funktionen $f(x) = \arctan x$ är uppåt begränsad på $\mathbb{R}$ och dess supremum är $\pi/2$. (Till att börja med så är $\pi/2$ en majorant till f (dvs till V_f) eftersom $f(x) \leq \pi/2$ för alla x. Vidare är det lätt att hitta en följd av punkter x_k (tex $x_k = k$) s.a. $y_k = f(x_k) \to \pi/2$. Alltså är $\pi/2$ supremum för V_f.)

Obs att i detta fall $\sup_{\mathbb{R}} f$ inte antas i någon punkt x (eftersom ju $\arctan x < \pi/2$ för alla x). $\square$

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så är f uppåt begränsad enligt sats 2 i PB. Alltså existerar

$$\mu = \sup_{[a,b]} f.$$

Theorem 0.1 (Sats 3)**.** *Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så finns en punkt $\xi \in [a, b]$ s.a. $f(\xi) = \sup_{[a,b]} f$. Alltså antar f ett största värde.*

Bevis. Sätt $\mu = \sup_{[a,b]} f$. Vi vet att det finns $y_k \in V_f$ s.a. $y_k \to \mu$. Alltså finns $x_k \in [a, b]$ s.a. $f(x_k) \to \mu$.

Antag nu att μ inte antas. Då är $g(x) = 1/(\mu - f(x))$ kontinuerlig på $[a, b]$ och alltså uppåt begränsad enligt sats 2. Men detta motsägs av att $g(x_k) \to \infty$. Alltså måste f anta värdet μ i någon punkt. $\square$

Example 5. Betrakta $f(x) = x^2 e^{-x}$ på $[0, \infty)$. Klart att $f(0) = 0$ och att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$. Vi ska nu se att f antar ett största värde på $[0, \infty)$. Det är lätt att hitta en punkt, tex $x = 1$ där f är strikt positiv; $f(1) = 1/e$. Eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ så finns ω s.a. $f(x) < 1/2e$ om $x > \omega$. Enligt sats 3 antar f ett största värde μ på $[0, \omega]$. Klart att $\mu \geq 1/e$. Alltså är $f(x) \leq \mu$ för alla $x \in [0, \infty)$.

I detta fall kan vi faktiskt räkna ut vad μ är. Vi vet att μ antas i någon punkt $\xi \in [0, \omega]$. Eftersom speciellt då (varje sådan punkt) ξ är en lokal maximipunkt, så $f'(\xi) = 0$. En enkel räkning visar att maximium antas för $\xi = 2$, så $\mu = f(2) = 4/e^2$. $\square$

Övning 1 Visa påståendet i exempel 3.

Övning 2 Visa att (1) följer från (SE).

Övning 3 Visa att $f(x)$ är kontinuerlig i $a \in D_f$ om och endast om $f(x_k) \to f(a)$ för varje talföljd $x_k \in D_f$ sådan att $x_k \to a$.

En mängd $V \subset \mathbb{R}$ är *öppen* om det kring varje $x \in V$ finns ett öppet intervall som är helt innehållet i V. Tex är varje öppet intervall $]a, b[$ en öppen mängd. En mängd E är *sluten* om dess komplement $E^c = \mathbb{R} \setminus E$ är öppen.

Övning 4 Antag att E är sluten. Visa att om $x_k \in E$ och $x_k \to a$ så $a \in E$. Gäller även omvändningen?

Övning 5 Visa att $E = [a, b]$ är sluten.

Låt $E = \{1/k;\ k = 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{0\}$. Visa att E är sluten. Vad händer om man tar bort punkten 0?

Övning 6 Antag att K är en sluten och begränsad mängd och att f är en kontinuerlig funktion på K.
(i) Visa att f är uppåt begränsad.
(ii) Visa att $\sup_K f$ antas i någon punkt.

Övning 7 Visa att om $f(x)$ är växande på $[a, x_0[$ och uppåt begränsad så existerar $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ och är lika med $\sup_{[a,x_0[} f$.

Övning 8 Visa att $x \sin(1/x)$ är likformigt kontinuerlig på $]0, 1]$.

Övning 9 Visa att $\sin(1/x)$ inte är likformigt kontinuerlig på $]0, 1]$.