Kortfattade lösningar, Envariabel, MMG200

26 augusti 2009

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. Se kurslitteraturen.

4. Vi har

$$(\ln x)^{\ln x} = e^{\ln((\ln x)^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln \ln x} \ .$$

   Så

$$\begin{aligned} D(\ln x)^{\ln x} &= (\ln x)^{\ln x} D\{\ln x \cdot \ln \ln x\} \\ = (\ln x)^{\ln x}\{\frac{1}{x} \ln \ln x + \ln x \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\} &= \frac{(\ln x)^{\ln x}}{x}(1 + \ln \ln x) \ . \end{aligned}$$

5. Ekvationen ger

$$\begin{aligned} z &= \frac{4+i}{2} + \sqrt{\left(\frac{4+i}{2}\right)^2 - 4i} \\ &= \frac{4+i}{2} + \sqrt{\left(\frac{4-i}{2}\right)^2} = \frac{4+i}{2} \pm \frac{4-i}{2} \ . \end{aligned}$$

   Så rötterna är $z = 4$ och $z = i$.

6. Vi har

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cos x \sin x \, dx = \begin{bmatrix} t = \cos x, & dt = -\sin x dx \\ 0 \mapsto 1, & \frac{\pi}{2} \mapsto 0 \end{bmatrix} =$$

$$\int_0^1 te^t dt = [PI] = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = 1 \ .$$

7. (a) Vi har

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{2\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1+16x^4}}{\sqrt{1+16x^4}\sqrt{1+x^4}}$$
$$\frac{3-12x^4}{\sqrt{1+16x^4}\sqrt{1+x^4}\left(2\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+16x^4}\right)} .$$

Nämnaren är positiv och täljaren är

$$3 - 12x^4 = 3(1-(2x^2)^2) = 3(1-2x^2)(1+2x^2) .$$

Detta ger att $f'(x) > 0$ om $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $f'(x) < 0$ om $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alltså har $f(x)$ har ett största värde då $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Enligt (a) gäller

$$f(x) \le f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} .$$

Integranden är avtagande och integrationsintervallet har längden $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Detta ger

$$f(x) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{2}^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}} .$$

8. Vi har

$$F(y) = \left[\begin{array}{ll} x = ty, & dx = ydt \\ 0 \mapsto 0, & 1 \mapsto 1/y \end{array} \right] = \int_0^{1/y} \frac{y^2}{y^2+y^2t^2} dt = \int_0^{1/y} \frac{1}{1+t^2} dt .$$

Så $\lim_{y\to 0} F(y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.