Förslag till lösningar, Envariabel, MMG200

29 augusti 2012

1. (a) Se kurslitteraturen.

   (b) Ja. Ett exempel är $f(x) = x - 1$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

   (c) Falskt. Ett motexempel är $f(x) = 2$, $g(x) = \sin x$.

2. Se kurslitteraturen.

3. Låt

$$f(x) = \frac{x^3}{9(x+2)} \ .$$

Då är

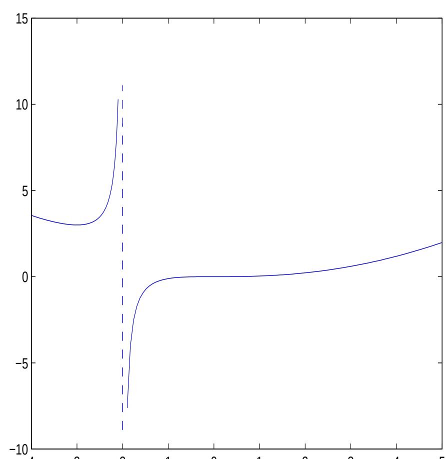
$$f'(x) = \frac{1}{9}\frac{(3x^2(x+2) - x^3)}{(x+2)^2} = \frac{2}{9}\frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

och vi får följande teckentabell

x		-3		-2		0	
f'	$-$	0	$+$	$\sim$	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\sim$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

.

Vi ser att f har ett lokalt minimum då $x = 3$ och en terasspunkt $(0, 0)$ och en lodrät asymptot $x = -2$.



4.
$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \sin x^2\,dx = \left[\begin{array}{cc} t = x^2, & 0 \mapsto 0 \\ dt = 2xdx, & \sqrt{\pi/2} \mapsto \pi/2 \end{array}\right] =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t \sin t\,dt = \left[\begin{array}{c} \text{Partiell} \\ \text{integration} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left([-t\cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt \right)$$
$$= \frac{1}{2}[\sin t]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\ .$$

5. Vi har
$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = I - II\ ,$$
$$I = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \to 1 \cdot 1 = 1, x \to 0\ ,$$
och
$$II = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\sin^2 x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x}\frac{1}{\cos x + 1} =$$
$$-\frac{1}{\cos x + 1} \to -\frac{1}{2}, x \to 0\ .$$
Så
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ .$$
En annan lösning är med Taylors formel: Vi har $e^t = 1 + t + O(t^2)$, $e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ och $\sin x = x + O(x^3)$, $x \to 0$. Så
$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 + x^2 - (1 - \frac{1}{2}x^2) + O(x^4)}{x^2 + O(x^3)} =$$
$$\frac{\frac{3}{2}x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^3)} = \frac{\frac{3}{2} + O(x)}{1 + O(x)} \to \frac{3}{2}, x \to 0\ .$$

6. Eftersom y är kontinuerlig ger integralkalkylens fundamentalsats att y är deriverbar och $y'(x) = y^2(x)$. Dessutom är $y(0) = 1$. Separation av variablerna ger
$$\frac{dy}{y^2} = dx, \int \frac{dy}{y^2} = \int dx, -\frac{1}{y} = x + C\ .$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$, så $-\dfrac{1}{y} = x - 1$ eller

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \ .$$

Vi ser att y är definierad då $x < 1$.

7. Låt $d(x)$ vara avståndet från $(x, 2-x^2)$ till origo. Detta är mininmalt samtidigt som $d^2(x)$ är minimalt. Så det gäller att avgöra när $f(x) = d^2(x) = x^2 + \left(2-x^2\right)^2$ är minimal.

   Vi har $f'(x) = 2x + 2\left(2-x^2\right)(-2x) = 2x\left(2x^2-3\right)$ med nollställena $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Nu gäller $f(0) = 4$ och $f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{7}{4} < 4$. Så $f(x)$ är minimal när $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Så punkterna $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$ ligger närmast origo.

8. Vi har

$$F(x) = x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = x\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt + x\int_x^1 \frac{1}{t^2}dt \ .$$

Nu är

$$x\int_x^1 \frac{1}{t^2}dt = x\left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = x(\frac{1}{x} - 1) \to 1, x \to 0 \ .$$

Vidare gäller $x\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt \to 0, x \to 0$. För att se det observerar vi att $\dfrac{\cos t - 1}{t^2}$ är en begränsad funktion på $(0, 1]$. Detta följer av Taylors formel,

$$\cos t - 1 = \frac{t^2}{2} + O(t^3) = O(t^2), t \to 0 \ .$$

Så gränsvärdet

$$I = \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt$$

existerar.