MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2013-01-17.

1. (a) Se boken sidan 62.
   (b) Se boken sidan 62.
2. (a) Se sidan 93 i boken.
   (b) Se sidan 92 i boken.
3. Se boken sidan 128.
4. (a) Man kan välja 11 bland 22 på $\binom{22}{11}$ sätt och 5 bland de återstående på $\binom{11}{5}$ sätt. Totalt får vi

$$\binom{22}{11} \cdot \binom{11}{5} = \frac{22!}{11!11!} \frac{11!}{6!5!} = \frac{22!}{11!5!6!}$$

   (b) Vi räknar först ut på hur många sätt hon kan välja de som inte är målvakt. Det handlar om att först välja 10 bland 19 och sedan 4 bland de återstående 9. Hon kan sedan fördela de 3 målvakterna på $3! = 6$ sätt. Totalt blir det alltså

$$6 \cdot \binom{19}{10} \cdot \binom{9}{4}$$

   olika lag. (Om man räknar ut det så blir det 69837768. Tufft att vara förbundskapten om man har ambitionen att fundera över alla möjligheter.)

5. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: Vi testar för $n = 6$ och får

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ och } 6^3 = 216$$

   så påståendet är sant för $n = 6$.

   Induktionssteg: Antag att det är sant för något n där $n \geq 6$ och visa att då är det också sant för $n + 1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet och $n \geq 6$ så får vi

$$(n + 1)! = (n + 1)n! > (n + 1)n^3 \geq 7n^3.$$

   Dessutom vet vi att $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Men $n^3 > n^2$ om $n > 1$ så $3n^3 \geq 3n^2 + 1$ och därmed får vi

$$(n + 1)! > 7n^3 = n^3 + 3n^3 + 3n^3 + 1 \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n + 1)^3$$

   och saken är klar.

   Enligt induktionsprincipen är påståendet därmed sant för alla positiva heltal $n \geq 6$.

6. (a) Antag att d delar både a och b. Då gäller enligt känd sats att $d|(a+b)$. Omvänt om d delar både a och $a+b$ så gäller enligt samma sats att $d|(a+b)-a=b$. Alltså är de gemensamma delarna till $\{a,b\}$ och de till $\{a,a+b\}$ samma och därmed är också den största gemensamma delaren samma.

   (b) Vi använder lämpligen Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 16569 &= 2\cdot 7245+2079 \\ 7245 &= 3\cdot 2079+1008 \\ 2079 &= 2\cdot 1008+63 \\ 1008 &= 16\cdot 63. \end{aligned}$$

   Från detta drar vi slutsatsen att $SGD(16569,7245)=63$.

7. (a) Reflexivitet, symmetri och transitivitet följer direkt av motsvarande egenskap hos '='.

   (b) Det är en cirkel med centrum i origo och radien $\sqrt{2}$.

   (c) De består av alla cirklar med centrum i origo (inklusive $\{(0,0)\}$).

   (d) T.ex. $\{(0,x)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\}$.

8. (a) Vi får

$$\begin{aligned} a\star x=a\star y &\Longrightarrow a'\star(a\star x)=a'\star(a\star y)\Longrightarrow(a'\star a)\star x=(a'\star a)\star y \\ &\Longrightarrow e\star x=e\star y\Longrightarrow x=y, \end{aligned}$$

   där vi i tur och ordning utnyttjade existens av invers och definitionen av begreppet operation, associativiteten, egenskapen hos invers samt egenskapen hos identitet.

   (b) Vi har med hjälp av potensreglerna att

$$a^m=a^n \Longleftrightarrow a^n\star a^{m-n}=a^n\star e$$

   vilket enlilgt första deluppgiften implicerar att $a^{m-n}=e$.

   (c) Eftersom G är ändlig så innehåller mängden

$$\{a^n : n\geq 1\}\subseteq G$$

   bara ändligt många element oavsett val av $a\in G$. Det betyder att följden måste upprepa sig så att $a^m=a^n$ för några m,n med $m>n$. Enligt förra deluppgiften är då $a^{m-n}=e$ och därmed är saken klar.