MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2013-01-17.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Oskar Hamlet, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. (a) Formulera Aritmetikens fundamentalsats.
   (b) Antag att p är ett primtal. Visa att om $p \mid ab$, så medför det att $p \mid a$ eller $p \mid b$. (3p)

2. (a) Definiera begreppet *partition* av en mängd.
   (b) Låt R vara en ekvivalensrelation på en mängd M. Visa att ekvivalensklasserna till R utgör en partition av M. (3p)

3. Formulera och bevisa binomialsatsen. (3p)

4. Observera att för frågorna i denna uppgiften behöver du inte räkna ut de olika fakulteter som eventuellt dyker upp. Det räcker att uttrycka svaret med hjälp av dessa fakulteter.
   (a) På hur många sätt kan man välja ut en grupp på 11 personer och en grupp på 5 personer bland 22 personer?
   (b) Förbundskaptenen för det svenska damlandslaget i fotboll har 22 spelare i sin EM-trupp. Av dessa är 3 målvakter. På hur många sätt kan hon ta ut 11 spelare och 5 avbytare om exakt en målvakt ska vara bland spelarna och exakt en målvakt bland avbytarna?
   (3p)

5. Visa att $n! > n^3$ för alla naturliga tal $n \geq 6$. (3p)

6. (a) Visa att $SGD(a, b) = SGD(a, a + b)$ för alla naturliga tal a och b.
   (b) Beräkna $SGD(7245, 16569)$. (3p)

Var god vänd!

7. Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på $\mathbb{R}^2$ definierad av

$$\mathcal{R} = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}.$$

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

   (b) Rita ekvivalensklassen av $(1,1)$ i ett koordinatsystem.

   (c) Beskriv alla ekvivalensklasser geometriskt.

   (d) Ge en mängd med exakt ett element ur varje ekvivalensklass. (3p)

8. Låt $\langle G, \star \rangle$ vara en grupp. Eftersom operationen i en grupp är associativ så kan man definiera *potens* i gruppen "som vanligt", d v s upprepad operation med sig själv så att t ex

$$a^5 = a \star a \star a \star a \star a.$$

De "vanliga" potensreglerna gäller så t ex $a^n \star a^m = a^{m+n}$ och det är fritt fram att använda dessa nedan.

   (a) Visa att
   $$a \star x = a \star y \Longrightarrow x = y$$
   för alla $a, x, y \in G$. Ange i varje steg *vilket* gruppaxiom du använder.

   (b) Använd t ex resultatet i första deluppgiften till att visa att om $m > n > 0$ så gäller för $a \in G$ att
   $$a^m = a^n \Longrightarrow a^{m-n} = e,$$
   där e är neutrala elementet (identiteten) i G.

   (c) Antag nu att G är en ändlig mängd. Visa att det för alla $a \in G$ finns ett positivt tal n sådant att $a^n = e$. (4p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 8 februari. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 9.00-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.