l'Hospitals regel, Taylors formel m.m.

Sats 1.1. (l'Hospitals regel) *Antag att* $f(x)$ *och* $g(x)$ *är deriverbara på* $[-a, 0) \cup (0, a]$ *för något* $a > 0$*, och att* $g'(x) \neq 0$ *om* $x \neq 0$*. Antag vidare att* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$*,* $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ *och att* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existerar. Då gäller*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

I boken bevisas detta under extra antagande på regulariteten hos f och g och att $g'(0) \neq 0$. För att bevisa Sats 1 behöver vi en starkare form av medelvärdessatsen.

Sats 1.2. (Den generaliserade medelvärdessatsen) *Antag att* f *och* g *är kontinuerliga i det slutna intervallet* $[a, b]$ *och deriverbara i det öppna intervallet* (a, b)*. Då finns en punkt* $a < \xi < b$ *så att*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a) .$$

När $g(x) = x$ är detta den vanliga medelvärdessatsen.
Om $g(b) - g(a) \neq 0$ och $g'(\xi) \neq 0$ kan detta skrivas

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Den vanliga medelvärdessatsen ger $f(b) - f(a) = f'(\xi_1)(b - a)$ och $g(b) - g(a) = g'(\xi_2)(b - a)$. Så

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi_1)(b - a)}{g'(\xi_2)(b - a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

Det är *inte* självklart att man kan välja $\xi_1 = \xi_2$, det är precis detta som den generaliserade medelvärdessatsen garanterar.

Bevis av den generaliserade medelvärdessatsen. Beviset är snarlikt beviset av medelvärdessatsen. Vi bildar hjälpfunktionen

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) .$$

Då är h kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Dessutom gäller $h(a) = h(b) = 0$ så Rolles sats ger att $h'(\xi) = 0$ för något $a < \xi < b$. Men $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(x)$ och saken är klar. ■

Bevis av l'Hospitals regel. Börja med att definiera (eller definiera om) $f(0) = g(0) = 0$. Då uppfyller f och g villkoren i den generaliserade medelvärdessatsen och alltså gäller

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eftersom $\xi = \xi_x \to 0$ då $x \to 0$. ■

l'Hospitals regel gäller förstås också då $x \to a$, $x \in \mathbb{R}$. Det finns också en version av l'Hospitals regel då $x \to \infty$ (och $x \to -\infty$).

Sats 1.3. *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på $[N, \infty)$ för något N, och att $g'(x) \neq 0$ om $x > N$. Antag vidare att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ och att $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar. Då gäller*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ och $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Tag ω så stort att $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \epsilon$ då $x \geq \omega$. Fixera $y > \omega$ och tag $x > y$. Då ger den generaliserade medelvärdessatsen att

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \epsilon$$

eftersom $\xi > \omega$. Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ ger detta att

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - A\right| \leq \epsilon$$

då $y > \omega$ dvs. $\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{g(y)} = A$ och beviset är klart. ■

l'Hospitals regel gäller också då $\lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$. Formuleringen och beviset av detta lämnas åt den intresserade läsaren.

Exempel 1.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\cos 2x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+4\sin 2x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+8\cos 2x}{\cos x}=6\ .$$

En enklare lösning (Eller hur?) är med Taylors formel.

Vi har $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+O(x^4), x\to 0$ och alltså $\sin 2x=2x-\frac{8}{6}x^3+O(x^4), x\to 0$. Så

$$\frac{2\sin x-\sin 2x}{x-\sin x}=\frac{2x-\frac{2}{6}x^3-2x+\frac{8}{6}x^3+O(x^4)}{\frac{1}{6}x^3+O(x^4)}$$
$$=\frac{x^3+O(x^4)}{\frac{1}{6}x^3+O(x^4)}=\frac{1+O(x)}{\frac{1}{6}+O(x)}\to 6, x\to 0\ .$$

□

Vad är det för fel i följande (mot)exempel?

Motexempel 1.2 Gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$$

existerar inte.

□

Motexempel 1.3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x\sin x}{e^{\sin x}(x+\cos x\sin x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x}\cos x(x+\cos x\sin x+2\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cos x}{e^{\sin x}(x+\cos x\sin x+2\cos x)}=0\ .$$

□

Ett alternativt bevis av Taylors formel

Låt $P_2(x)$ vara Taylorpolynomet till f av ordning två. Genom upprepad användning av den generaliserade medelvärdessatsen får vi att

$$\frac{f(x)-P_2(x)}{\frac{1}{6}x^3}=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{1}{2}x^2f''(0)}{\frac{1}{6}x^3}$$
$$=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)-\xi_1 f''(0)}{\frac{1}{2}\xi_1^2}=\frac{f''(\xi_2)-f''(0)}{\xi_2}=f'''(\xi)$$

och beviset är klart då $n = 2$. I det allmänna fallet betraktar vi istället

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}} .$$