Matematik
Göteborgs universitet
H.C. &J.S.

Inga hjälpmedel
Telefonvakt:
Emil Gustafsson
0703-08 83 04

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Fredag den 13 april 2012, 8.30-12.30

1. (a) Ge definitionen av att $f(x)$ är deriverbar i punkten a.
   (b) Visa direkt från definitionen att $f'(x) = 3x^2$ om $f(x) = x^3$.
   (c) Om $f(x)$ är kontinuerlig i punkten a, följer det att f också är deriverbar i a? Om ja, förklara varför och om nej, ge ett motexempel.

   (4p)

2. (a) Formulera Taylors formel (kring en godtycklig punkt $x = a$) med Taylorpolynom av grad 2 och med Lagranges restterm.
   (b) Bevisa Taylors formel med Taylorpolynom av grad 2 i en omgivning av $x = 0$ (Maclaurins formel med bokens terminologi) och resttermen på integralform.

3. (a) Rita funktionen $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$.
   (b) Hur många reella rötter har ekvationen $f(x) = 0$?
   (c) För vilka värden på a har ekvationen $f(x) = a$ exakt en reell rot?
   (d) Om $g(x) = f(x) + 1000$, hur många reella rötter har ekvationen $g(x) = 0$?

4. Bestäm

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx\ .$$

5. Betrakta funktionen $f(x) = x^6(e^{-x^2-4x})$.
   (a) Vad är ekvationen för tangenten till $f(x)$ i punken $(1, e^{-5})$?
   (b) Vad är ekvationen för normalen till $f(x)$ i punken $(2, 64e^{-12})$?
   (c) Visa att $f(x)$ har ett största värde på $[0, \infty)$ och ange detta värde.

Vänd!

6. Enligt biologisk expertis tillväxer en viss population så att dess massa $x(t)$ vid tiden t uppfyller differentialekvationen

$$x'(t) = kx(t)(1000 - x(t)).$$

Från början fanns det 100 kg bakterier och efter en vecka 250 kg. Hur mycket finns det efter ytterligare en vecka?

7. Beräkna följande gränsvärden.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})\cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$.

8. Bestäm

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \sin x}{1 + x^2}\, dx\ .$$