

## Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Fredag den 13 januari 2012, 8.30-12.30

- (a) Ge definitionen av att  $f(x) \rightarrow L$  när  $x \rightarrow a$ .  
(b) Bevisa att om  $f(x) \rightarrow L$  när  $x \rightarrow a$  och  $g(x) \rightarrow M$  när  $x \rightarrow a$ , så gäller  $f(x) + g(x) \rightarrow L + M$  när  $x \rightarrow a$ .

(4p)

- (a) Formulera Taylors formel med Taylorpolynom av grad 2 och med Lagranges restterm.  
(b) Bevisa Taylors formel med Taylorpolynom av grad 2 i en omgivning av  $x = 0$  (Maclaurins formel med bokens terminologi) och resttermen på integralform.

- Beräkna följande gränsvärden.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{e^{8x} - 1}$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x \cos x}$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$ .

- Bestäm

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx .$$

- Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 2y = e^x .$$

Vänd!

6. Betrakta funktion  $f(x) = e^{\cos x} \sin x$ .

- (a) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan  $y = f(x)$  genom punkten  $(\pi/2, f(\pi/2))$ ?
- (b) För vilket  $x$  i  $[\pi, \pi + \pi/4]$  är  $f$  maximal (på  $[\pi, \pi + \pi/4]$ ) ?
- (c) För vilket  $x$  i  $[2\pi, 2\pi + \pi/4]$  är  $f$  maximal (på  $[2\pi, 2\pi + \pi/4]$ ) ?
- (d) Är  $f$  konvex eller konkav på  $[\pi/8, \pi/4]$ ?

7. Hur många positiva lösningar har ekvationen

$$2x^{1/x^2} = a$$

för olika värden på konstanten  $a$ ?

8. Visa att gränsvärdet

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y^3 \int_0^1 x^2 e^{-(yx)^2} dx$$

existerar.