Lösningar, Envariabel, MMG200

16 april 2009

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. Vi har

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx = \begin{bmatrix} y = \sin x, dy = \cos x dx, \\ 0 \mapsto 0, \pi/2 \mapsto 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \int_0^1 e^y dy = e - 1 \ .$$

4. Vi har $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$. Teckenstudie visar att $f'(x) > 0$ när $x < -1$ och alltså är $f(x)$ strängt växande där. Eftersom $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ och $f(-1) = \frac{10}{9} > 0$ har f ett nollställe då $x < -1$.

   När $-1 < x < \frac{1}{3}$ är derivatan negativ och funktionen avtagande. Dessutom är $f(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27}$ så f har ett nollställe då $-1 < x < \frac{1}{3}$.

   För $x > \frac{1}{3}$ är derivatan positiv och funktionen växande. Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ följer att f har ett nollställe då $x > \frac{1}{3}$.

   Funktionen har alltså tre nollställen.

5. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - r - 2 = 0$ med rötterna $r = -1$ och $r = 2$. Så den homogena ekvationen har lösningen

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} \ .$$

   För att bestämma en partikulärlösning observerar vi att vi har resonans (e^{-x} är en homogenlösning) och ansätter $y_p(x) = Cxe^{-x}$. Då gäller $y_p'(x) = Ce^{-x}(1-x)$ och $y_p''(x) = Ce^{-x}(x-2)$. Insättning i differentialekvationen ger $C = -\frac{1}{3}$.

Så differentialekvationen har lösningen $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} - \frac{1}{3}xe^{-x}$. Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2B - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

med lösningen $A = \frac{5}{9}$ och $B = \frac{4}{9}$.

Så

$$y(x) = \frac{1}{9}\left((5-3x)e^{-x} + 4e^{2x}\right) \ .$$

6. Vi har $f'(x) = e^{-x}(3x^2 - x^3) = e^{-x}x^2(3-x)$. Så $f'(x)$ är positiv på $(0,3)$ och negativ på $(3,\infty)$ och alltså är $f(x)$ är växande på $(0,3)$ och avtagande på $(3,\infty)$. Så $f(x)$ har ett största värde då $x = 3$. Värdet är $f(3) = 27e^{-3}$.

7. Låt $f(x) = x^{1/5}$. Då är $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$ och medelvärdessatsen ger

$$d(x) = (x^5 + x^4)^{1/5} - x = f(x^5 + x^4) - f(x^5) = f'(\xi)x^4 = \frac{x^4}{5\xi^{4/5}} \ ,$$

där $x^5 \leq \xi \leq x^5 + x^4$. Så

$$\frac{x^4}{5(x^5+x^4)^{4/5}} \leq d(x) \leq \frac{x^4}{5x^4} = \frac{1}{5} \ .$$

Men nu gäller $\dfrac{x^4}{(x^5+x^4)^{4/5}} = \left(\dfrac{x^5}{x^5+x^4}\right)^{4/5} \to 1, x \to \infty$. Så instängningsregeln ger $\lim_{x\to\infty} d(x) = \frac{1}{5}$ dvs. $\lim_{x\to\infty}\left((x^5+x^4)^{1/5} - x\right) = \frac{1}{5}$.

8. Låt

$$I_n = \int_0^1 \frac{n\sin\frac{y}{n}}{y(1+y^2)}dy \ .$$

Eftersom $\dfrac{n\sin\frac{y}{n}}{y} = \dfrac{\sin\frac{y}{n}}{\frac{y}{n}} \to 1, n \to \infty$, verkar det troligt att $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}$.

För att bevisa detta använder vi Taylorutveckling. Vi har $\sin t = t - \cos\xi\dfrac{t^3}{3!} = t + R(t)$ så $|t - \sin t| = |R(t)| \leq \dfrac{1}{6}t^3 \leq t^3$. Detta ger $\left|1 - \dfrac{\sin\frac{y}{n}}{\frac{y}{n}}\right| = \left|\dfrac{R(\frac{y}{n})}{\frac{y}{n}}\right| \leq \dfrac{y^2}{n^2}$.

Så

$$|I - I_n| \leq \int_0^1 \frac{y^2}{n^2}\frac{dy}{1+y^2} \leq \int_0^1 \frac{1}{n^2}dy = \frac{1}{n^2} \to 0, n \to \infty$$

dvs. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I = \dfrac{\pi}{4}$.