Matematik
Göteborgs universitet
M.A & H.C.

Inga hjälpmedel
Telefonvakt:
Christoffer Cromvik
076-272 18 61

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Lördag den 17 januari 2009, 8.30-13.30

1. (i) Ge definitionen av att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten a.

   (ii) Ge definitionen av att $f(x)$ är deriverbar i punkten a.

   (iii) Visa att om $f(x)$ är deriverbar i a så är den kontinuerlig i a.

   (4p)

2. Formulera och bevisa satsen om mellanliggande värde.

3. Avgör om
$$\frac{\sin^2 x(1-\cos x)}{x^4}$$
har ett gränsvärde då $x \to 0$ och bestäm i så fall detta.

4. Bestäm största och minsta värdet av
$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$
på $[\frac{1}{2}, 2]$.

5. Beräkna
$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$$

6. Ett (sfäriskt) hagelkorn tillväxer genom att vattenånga i molnet fastnar på haglets yta. Volymökningen hos haglet är proportionell mot hagelkornets area. Från början är hagelkornets volym $0,1\,\mathrm{mm}^3$ och efter 15 minuter har den ökat till $0,8\,\mathrm{mm}^3$. Hur lång tid tar det tills volymen har ökat till $2,7\,\mathrm{mm}^3$?

Vänd!

7. Visa att

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\sin x|} \leq 1 \ .$$

8. (i) Antag $a > 0$. Visa att man kan definiera f i punkten 0 så att

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{t} & , \quad t \neq 0 \\ f(0) & , \quad t = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig på $[0, 1]$.

(ii) Beräkna

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{e^{at} - e^{-at}}{t} dt.$$