

## Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Tisdag den 23 augusti 2011, 8.30-12.30

- (i) Ge definitionen av att en delmängd  $X$  av  $\mathbb{R}$  är uppåt begränsad.  
(ii) Vad menas med en majorant till  $X$ .  
(iii) Ge definitionen av supremum av  $X$ .  
(iv) Bestäm supremum av mängden  $\{1 - 1/n; n = 1, 2, 3, \dots\}$ .

(4p)

- Visa att om  $f$  är en deriverbar funktion på  $]a, b[$  och  $f'(x) = 0$  för alla  $x$  så är  $f$  en konstant funktion.

- Formulera och bevisa satsen om mellanliggande värde.

- Ekvationen

$$z^3 - 2z^2 + (2 + i)z - 1 - i = 0$$

har en reell rot. Bestäm ekvationens alla (komplexa) rötter.

- Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{x}{(x-3)(x-2)} dx.$$

- Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x^3}.$$

- Två tankar  $A$  och  $B$ , som rymmer 100 respektive 200 liter, är förbundna med ett rör. In i  $A$  rinner (genom ett annat rör) förorenat vatten med koncentrationen 10% med en hastighet av 10 liter per minut. Ut ur  $A$  och in i  $B$  rinner vatten med hastigheten 10 liter per minut. Dessutom rinner in i  $B$  (genom ytterligare ett rör) förorenat vatten med koncentrationen 5% och med en hastighet av 10 liter per minut. Slutligen rinner det ut 20 liter per minut ur tank  $B$ .

Från början är tankarna fyllda med rent vatten. Bestäm koncentrationerna  $c_A(t)$  i  $A$  respektive  $c_B(t)$  i  $B$  efter  $t$  minuter.

Vad är deras gränsvärde då  $t \rightarrow \infty$ ?

- Sätt för  $y > 0$

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y}{y^2 + x^2} dx.$$

Beräkna  $\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y)$ .