Lösningar, Envariabel, MMG200

23 augusti 2011

1. (i)-(iii) Se kurslitteraturen.

   (iv) Låt $M = \{1 - 1/n;\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Då är $\sup M = 1$.

   Bevis. Eftersom $1 - 1/n < 1$ för alla n, är 1 en övre begränsning. Å andra sidan, om $a < 1$ så finns ett n med $1 - 1/n > a$. Alltså är a inte en övre begränsning.

2. Se kurslitteraturen.

3. Se kurslitteraturen.

4. Skriv $p(z) = z^3 - 2z^2 + (2+i)z - 1 - i = z^3 - 2z^2 + 2z - 1 + i(z-1) = q(z) + ir(z)$. Vi observerar att $p(1) = q(1) = r(1) = 0$. Så $z = 1$ är en rot.

   Eftersom $p(1) = 0$ delar $z - 1$ polynomet p. Division ger $q(z) = (z - 1)(z^2 - z + 1)$ och $p(z) = (z-1)(z^2 - z + 1 + i)$.

   De andra rötterna fås ur $z^2 - z + 1 + i = 0$. Vi ser att $z = i$ är en rot. Division med $z - i$ ger, eftersom $i(1-i) = 1 + i$, $z^2 - z + 1 + i = (z - i)(z - (1 - i))$. Så den tredje roten är $z = 1 - i$.

5. Partialbråksuppdelning ger

   $$\frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} \ .$$

   Så

   $$\int_0^1 \frac{x}{(x-3)(x-2)} dx = \Big[3\ln|x-3| - 2\ln|x-2| \Big]_0^1 = 5\ln 2 - 3\ln 3 \ .$$

6. Vi Taylorutvecklar!

   Eftersom $\sin t = t + O(t^2), t \to 0$, gäller $\sin x^3 = x^3 + O(x^4), x \to 0$.

   För att härleda utvecklingen av arctangenten låter vi $f(x) = \arctan x$. Då gäller $f(0) = 0$,

   $$f'(x) = (1+x^2)^{-1} \text{ så } f'(0) = 1,$$
   $$f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2} \text{ så } f''(0) = 0,$$

   och slutligen

   $$f'''(x) = -2(1+x^2)^{-2} + 4x(1+x^2)^{-3} \text{ och alltså } f'''(0) = -2.$$

Så Taylorutveclingen blir

$$\arctan x = x - 2\,\frac{x^3}{3!} + O(x^4) = x - \frac{x^3}{3} + O(x^4), x \to 0 \ .$$

(Om du kan denna formel behöver du inte härleda den.)

Detta ger

$$\frac{\arctan x - x}{\sin x^3} = \frac{-\frac{x^3}{3} + O(x^4)}{x^3 + O(x^4)} = -\frac{1}{3} + O(x) = -\frac{1}{3},\ \ x \to 0 \ .$$

7. Låt m_A och m_B vara mängden föroreningar i tank A respektive B. Så $m_A = 100c_A$ och $m_B = 200c_B$. Eftersom m'_A och m'_B är ändringen i koncentrationen per tidsenhet gäller för tank A att

$$m'_A = \ \text{(in-ut)}\ = 10\left(\frac{1}{10} - c_A\right)\ ,$$

och för tank B

$$m'_B = \ \text{(in-ut)}\ = 10\left(\frac{1}{20} + c_A\right) - 20c_B \ .$$

Detta kan skrivas

$$c'_A + \frac{1}{10}c_A = \frac{1}{100} \tag{0.1}$$

och

$$c'_B + \frac{1}{10}c_B = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{20} + c_A\right)\ . \tag{0.2}$$

Multiplikation med $e^{t/10}$ i (0.1) ger

$$\left(e^{t/10}c_A\right)' = \frac{1}{100}e^{t/10} \text{ så } e^{t/10}c_A = \frac{1}{10}e^{t/10} + C \ .$$

$c_A(0) = 0$ ger $C = -1/10$ och alltså

$$c_A(t) = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-t/10}\right)\ .$$

Med detta uttryck på c_A blir (0.2)

$$c'_B + \frac{1}{10}c_B = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\left(1 - e^{-t/10}\right)\right)\ .$$

eller
$$c_B' + \frac{1}{10}c_B = \frac{3}{400} - \frac{1}{200}e^{-t/10} \ .$$
Efter multiplikation med den integrerande faktorn får vi
$$\left(e^{t/10}c_B\right)' = \frac{3}{400}e^{t/10} - \frac{1}{200} \ .$$
Integration ger
$$e^{t/10}c_B = \frac{3}{40}e^{t/10} - \frac{t}{200} + C \ .$$
$t = 0$ ger $C = -3/40$ och vi får
$$c_B(t) = \frac{3}{40} - \left(\frac{t}{200} + \frac{3}{40}\right)e^{-t/10} = \frac{1}{200}\left(15 - (t+15)e^{-t/10}\right) \ .$$

Från formlerna för c_A och c_B ser vi att $\lim_{t\to\infty} c_A(t) = 1/10$ eller 10%, och $\lim_{t\to\infty} c_B(t) = 3/40$ eller $7,5\%$. (Detta kan man inse direkt(Eller hur?).)

8. Substitutionen $x = yt$ ger $dx = ydt$, $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1/y$ och vi får
$$F(y) = \int_0^{1/y} \frac{y}{y^2 + y^2t^2} ydt = \int_0^{1/y} \frac{1}{1+t^2} dt \to$$
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \ .$$