Lösningar, Envariabel, MMG200

24 augusti 2010

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. Se kurslitteraturen.

4. Vi har $x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{(\ln x)^2}$. Så $Dx^{\ln x} = e^{(\ln x)^2} \cdot D(\ln x)^2$
   $= x^{\ln x} \cdot 2\ln x \cdot D\ln x = \dfrac{2\ln x}{x} x^{\ln x}$.

5. Vi har $z = \frac{3}{2}i \pm \sqrt{-\frac{9}{4} + 2} = \frac{3}{2}i \pm \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}i \pm \frac{1}{2}i = \begin{cases} 2i \\ i \end{cases}$.

6. Den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 1 = 0$ eller $(r+1)^2 = 0$. Denna ekvation har alltså dubbelroten -1. Så $y_h(x) = (Ax + B)e^{-x}$.

   För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y = ax + b$. Då är $y' = a$ och $y'' = 0$. Vi får $2a + ax + b = x$ vilket ger $a = 1$ och $b = -2$. Alltså är $y_p(x) = x - 2$.

   Den allmänna lösningen är därför $y(x) = (Ax + B)e^{-x} + x - 2$.

   Derivering ger $y'(x) = e^{-x}(A - Ax - B) + 1$. Så begynnelsevillkoren ger

   $$\begin{cases} B - 2 = -1 \\ A - B + 1 = 3 \end{cases}$$

   med lösningen $A = 3$ och $B = 1$.

   Den sökta lösningen är alltså $y(x) = (3x + 1)e^{-x} + x - 2$.

7. Vi har

   $$\int_9^\infty \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt \\ \infty \to \infty, 9 \to 3 \end{array} \right]$$
   $$= \int_3^\infty \frac{2tdt}{t^2(1+t)} = 2\int_3^\infty \frac{dt}{t(1+t)} \ .$$

Partialbråksuppdelning ger $\dfrac{1}{t(1+t)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$. Så

$$\int_9^\infty \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = 2\int_3^\infty (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})dt = 2\left[\ln \frac{t}{t+1}\right]_3^\infty$$
$$2\left(\ln 1 - \ln \frac{3}{4}\right) = 2\ln \frac{4}{3}\ .$$

8. Låt $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Då kan vi skriva

$$(x^3+2x^2)^{1/3} - x = f(x^3+x^2) - f(x^3)\ .$$

Medelvärdessatsen ger

$$(x^3+2x^2)^{1/3} - x = f(x^3+2x^2) - f(x^3) = f'(\xi)\cdot 2x^2\ ,$$

där $x^3 \le \xi \le x^3+2x^2$. Nu är $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ så vi får $\frac{1}{3(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}} \le f'(\xi) \le \frac{1}{3x^2}$. Detta ger

$$\frac{2x^2}{3(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}} \le (x^3+2x^2)^{1/3} - x \le \frac{2x^2}{3(x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\ .$$

Men

$$\frac{2x^2}{3(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{x^3+2x^2}\right)^{\frac{2}{3}} \to \frac{2}{3}, x\to\infty\ .$$

Enligt instängningsregeln existerar alltså gränsvärdet och

$$\lim_{x\to\infty}\big((x^3+2x^2)^{1/3} - x\big) = \frac{2}{3}\ .$$