MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2014-01-11.

1. Se boken sidan 92.

2. (a) Se övningshäfte 6.
   (b) Se övningshäfte 6.
   (c) Man kan först t ex ta $\mathbb{Z}$, som inte är kropp eftersom bara 1 och -1 har multiplikativ invers i $\mathbb{Z}$. Ett andra exempel är någon $\mathbb{Z}_n$ (kongruensklasser modulo n) där n inte är ett primtal. Dessa är inte en kropp eftersom bara de klasser som är relativt prima med n har multiplikativ invers.

3. Se boken sidan 69.

4. Vi räknar modulo 10 för att få fram entalssiffran. Genom att ta successiva potenser får vi att

$$\begin{aligned}2013^2 &\equiv 3^2 = 9 \pmod{10}\\ 2013^3 &\equiv 9 \cdot 3 = 27 \equiv 7 \pmod{10}\\ 2013^4 &\equiv 7 \cdot 3 = 21 \equiv 1 \pmod{10}.\end{aligned}$$

   Detta ger att

$$2013^{2014} \equiv 3^{4\cdot 503+2} = \left(3^4\right)^{503} \cdot 3^2 \equiv 1^{503} \cdot 9 \equiv 9 \pmod{10}$$

   och alltså blir entalssiffran 9. För den omvända potensen får vi

$$\begin{aligned}2014^2 &\equiv 4^2 = 16 \equiv 6 \pmod{10}\\ 2014^3 &\equiv 6 \cdot 4 = 24 \equiv 4 \pmod{10}\\ 2014^4 &\equiv 4 \cdot 4 = 16 \equiv 6 \pmod{10}\end{aligned}$$

   och vi ser att resterna upprepar sig så att det är 6 om potensen är jämn och 4 om potensen är udda. Detta ger att entalssiffran blir 4 för 2014^{2013}.

5. Vi gör ett induktionsbevis över n.

   Först basfallet $n = 1$ som ger

$$\sum_{i=1}^{1} (-1)^i i^2 = (-1)^1 \cdot 1^2 = -1 \text{ och } \frac{(-1)^1 1(1+1)}{2} = -1.$$

   Alltså stämmer det för $n = 1$.

Antag nu att det gäller för något $n = k$ och visa att i så fall gäller det också för $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i i^2 &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i i^2 + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^k k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^k (k+1)}{2}\left(k - 2(k+1)\right) \\
&= \frac{(-1)^k (k+1)}{2}(-k-2) \\
&= \frac{(-1)^{k+1} (k+1)}{2}(k+2) \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)((k+1)+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Alltså stämmer likheten för $n = k + 1$.

Med stöd av basfallet och induktionssteget ovan så ger induktionsprincipen att likheten gäller för alla $n \geq 1$.

6. (a) Förutom de givna siffrorna ska man välja ytterligare en siffra bland de övriga 7 vilket kan göras på 7 sätt om man för tillfället bortser ifrån att första siffran inte får vara en nolla. Man har sedan 6 siffror som ska permuteras med två dubbletter. Det ger

$$7 \cdot \frac{6!}{2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 1260$$

tal. Från detta ska vi subtrahera antalet tal som startar med en nolla. Dessa består av 5 övriga siffror med återigen två dubbletter. Det ger

$$\frac{5!}{2!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30$$

och alltså blir det $1260 - 30 = 1230$ sexsiffriga tal som innehåller exakt 2 tvåor, 2 femmor och 1 fyra.

(b) Tal delbara med 3 kan som bekant karakteriseras av att deras siffersumma är delbar med 3. För de givna siffrorna är siffersumman $2+2+5+5+4 = 18$. Det betyder att de tal som blir delbara med 3 är de där den extra siffran är delbar med 3, d v s $0, 3, 6$ eller 9. Kalkylen blir liknande den i a). Om man bortser från att första inte får vara en nolla får vi nu

$$4 \cdot \frac{6!}{2!2!} = 6! = 720.$$

De som börjar på en nolla såg vi i a) att de är 30 så totalt $720-30 = 690$ som är delbara med 3. (Detta är faktiskt mer än hälften.)

7. (a) Antag att $e' \in G$ är en (eventuellt annan) identitet. Vi ska visa att $e' = e$. Eftersom e är en identitet så är $e \star a = a$ för alla $a \in G$, speciellt är $e \star e' = e'$. Men det faktum att e' är en identitet ger att $a \star e' = a$ för alla $a \in G$, så speciellt är $e \star e' = e$. Sätter vi ihop dessa två likheter så får vi $e' = e \star e' = e$ vilket var precis det vi skulle visa.

(b) Antag att också a' är en invers till a. Vi ska visa att $a' = a^{-1}$. Vi utnyttjar att $a \star a^{-1} = a' \star a = e$ och associativiteten och får

$$a' = a' \star e = a' \star (a \star a^{-1}) = (a' \star a) \star a^{-1} = e \star a^{-1} = a^{-1},$$

vilket var precis det vi skulle visa.

8. (a) Formeln för en geometrisk summa ger

$$\sum_{r=0}^{2m} (-x)^r = \frac{1 - (-x)^{2m+1}}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-x^{2m+1})}{1 + x} = \frac{1 + x^{2m+1}}{1 + x}$$

så $x^{2m+1} + 1 = (x+1) \sum_{r=0}^{2m} (-x)^r$ vilket ger att $x + 1$ delar $x^{2m+1} + 1$ eftersom summan uppenbarligen är ett heltal.

(b) Vi visar det kontrapositiva påståendet att om k inte är en tvåpotens så är det inte ett primtal. Om k inte är en tvåpotens så har k en udda faktor så $k = s(2m+1)$ för några positiva heltal s och m. Om vi sätter $x = 2^s$ i första deluppgiften så får vi att $2^s + 1$ delar

$$(2^s)^{2m+1} + 1 = 2^{s(2m+1)} + 1 = 2^k + 1.$$

Eftersom $s > 0$ så är $2^s + 1 \geq 3$ och eftersom $m > 0$ så är $2^k > 2^s$ så $2^s + 1$ är en äkta delare till $2^k + 1$. Alltså är $2^k + 1$ inget primtal.