MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2014-01-11.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Hjalmar Rosengren, 076-3077601.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Visa att ekvivalensklasserna till en ekvivalensrelation på A utgör en partition av A. (3p)

2. Låt R vara en mängd med en addition och en multiplikation.
   (a) Ge de 10 axiomen för att R är en ring.
   (b) Ge axiomen för att R är en kropp. (Det är tillåtet att referera till svaret i första deluppgiften.)
   (c) Ge två exempel på ringar som inte är kroppar. Motivera kort ditt svar. (4p)

3. (a) Definiera begreppen *delare* och *primtal*.
   (b) Visa att det finns oändligt många primtal. (3p)

4. Vad är entalssiffran i 2013^{2014} respektive 2014^{2013}? (3p)

5. Visa att
$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$$
för alla positiva heltal n. (3p)

6. I den här uppgiften krävs det att man svarar med ett explicit heltal för full poäng.
   (a) Hur många positiva sexsiffriga heltal finns det som innehåller exakt 2 tvåor, 2 femmor och 1 fyra?
   (b) Hur många av dessa är delbara med 3? (3p)

Var god vänd!

7. Låt $\star$ vara en operation på en mängd G. Antag att $\star$ är associativ och att det finns en identitet $e \in G$ med avseende på $\star$.

   (a) Visa att det inte finns fler identiteter än e i G.

   (b) Visa att givet $a \in G$ med invers $a^{-1} \in G$ så har a ingen ytterligare invers. (3p)

8. (a) Visa att om x och m är naturliga tal så gäller att $x+1$ delar $x^{2m+1}+1$.
   Tips: Betrakta den geometriska summan $\sum_{r=0}^{2m}(-x)^r$.

   (b) Visa att om $2^k + 1$ är ett primtal så är $k = 2^n$ för något heltal n.
   Tips: Sätt $k = s(2m+1)$ och utnyttja första deluppgiften med $x = 2^s$. (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade senast den 30 januari. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.