MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2013-08-21 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: .
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften.

   (a) Om $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$ är linjärt beroende så är också $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ linjärt beroende.

   (b) Om A och B är kvadratiska matriser och AB är inverterbar så är A och B också inverterbara.

   (c) Om matriserna A och B är inverterbara så är $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

   (d) Två icke-parallella egenvektorer till en symmetrisk matris måste vara vinkelräta.

   (e) Om $\det A = 0$ så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösning för varje $\boldsymbol{b}$.

   (f) Om $\boldsymbol{x_1}$ och $\boldsymbol{x_2}$ båda är lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ så är även $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ en lösning.

   (g) Om A är en 4×5–matris med 3 pivokolonner så har nollrummet till A dimensionen 2.

   (h) Om A saknar egenvärde så är $\det A \neq 0$.

2. (a) Visa att om A är inverterbar så har ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en entydig lösning.

   (b) Visa att om A och B är ivnerterbara $n \times n$ − matriser så är också AB inverterbar.

   (c) Visa att nollrummet till en är $m \times n$ − matris är ett undrrum till R^n.

3. Antag $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ är en ortonormalbas i R^p och att $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + c_p\boldsymbol{u}_p$. Härled en formel för koefficienterna c_j uttryckta med hjälp av $\boldsymbol{y}$ och basvektorerna.

4. Tre punkter i rummet är givna med koordinater i ett ON-system:
$$P_1 : (1, 1, 1),\ P_2 : (-1, 2, 0),\ P_3 : (2, -1, -1).$$

   (a) Beräkna arean av triangeln med hörn i P_1, P_2, och P_3.

   (b) Bestäm koordinaterna för tyngdpunkten till triangeln i (a).

5. Bestäm en bas för kolonnrummet och en bas för nollrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Avgör för vilka värden på a som följande ekvationssystem har entydig lösning, många lösningar respektive ingen lösning.
$$\begin{cases} -x + 4y & = & 3 \\ x - y + az & = & 0 \\ ax + 8y + 4z & = & 5 \end{cases}.$$

7. Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ där $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. En linjär avbildning F i rummet avbildar punkterna $(1, 1, -2)$, $(-2, 1, 1)$, och $(0, -2, 1)$ på punkterna $(-4, 1, 3)$, $(2, -5, 3)$ respektive $(3, 2, -5)$. Alla punkter är givna med koordinater i en och samma bas. Bestäm avbildningsmatrisen till F.

Lycka till!
Sven