MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2014-08-20 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Anna Persson.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften.
   (a) Linjen $(x, y, z) = (2t, -2-t, 3+t)$ är vinkelrät mot planet $4x - 2y + 2z = 7$
   (b) $\lambda = -1$ är ett egenvärde till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.
   (c) Om matriserna A och B är inverterbara så är $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
   (d) Om $\boldsymbol{x} \in$ nollrummet till A och $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ så är $\boldsymbol{x}$ en egenvektor till A.
   (e) Om ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ endast har reella rötter så är A diagonaliserbar.
   (f) En 4×4 – matris har alltid minst en reell egenvektor.
   (g) Om A har 3 pivotkolonner så är $\mathrm{Col}(A)$ en delmängd av R^3.
   (h) Om $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_p}$ är linjärt beroende vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ så är var och en av dem en linjärkombination av de övriga.

2. (a) Visa att nollrummet till en är $m \times n$ – matris är ett undrrum till R^n.
   (b) Visa att kolonnrummet till en $m \times n$ – matris är ett underrum till $\boldsymbol{R}^m$.
   (c) Visa att om A och B är inverterbara $n \times n$ – matriser så är också AB inverterbar.

3. Visa att om $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_p$ är vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ där $p > n$ så är de linjärt beroende.

4. För vilka x är vektorerna $(x, 2, 2)^T$,$(2, x, 4)^T$ och $(-1, 2, x)^T$ linjärt beroende?

5. Givet punkterna $P_1 = (1, -1, 0)$, $P_2 = (-2, 1, 1)$, $P_3 = (2, -3, 3)$ och $P_4 = (2, -1, 2)$ i en ON-bas i rummet.
   (a) Beräkna volymen av tetraedern med hörn i dessa punkter.
   (b) Bestäm ekvationen för den linje som går genom P_1 och mittpunkten på sträckan P_2P_3.

6. Bestäm talföljderna x_n och y_n om $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ och $\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 5x_n - 3y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n - 4y_n \end{array} \right.$.

7. Bestäm var sin bas för nollrummet och kolonnrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

8. Låt $\boldsymbol{v}$ vara en vektor i $\boldsymbol{R}^n$ med $|\boldsymbol{v}| = 1$ och sätt $A = \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T$.
   (a) Visa att $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till A och bestäm också egenvärdet.
   (b) Visa att A är symmetrisk och att $A^2 = A$.
   (c) Visa att om $\boldsymbol{x}$ är en godtycklig vektor i R^n så är $A\boldsymbol{x}$ den rätvinkliga projektionen av $\boldsymbol{x}$ på $\boldsymbol{v}$.

Lycka till!
Sven