

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Fredag den 11 januari 2013, 8.30-12.30

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge fyra poäng.

- (i) Ge definitionen av att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten a .
(ii) Ge definitionen av att $f(x)$ är deriverbar i punkten a .
(iii) Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig men inte deriverbar.
(iv) Visa från definitionen att $f'(1) = 1/2$ om $f(x) = \sqrt{x}$.
- Formulera och bevisa satsen om mellanliggande värden.
- Beräkna derivatan av $f(t) = \arccos(t)$ i punkten $t = 1/\sqrt{2}$.
- Bestäm volymen av det område som bildas då kurvan $y = \sqrt{x}e^x$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring x -axeln.
- Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$xy'(x) + (1-x)y(x) = 1, x > 0,$$

sådan att $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ existerar.

- Vilka av följande integraler är konvergenta?

$$(a) \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad (b) \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx, \quad (c) \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx ?$$

Motivera dina svar!

- Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^4}.$$

Vänd!

8. Låt för $x \geq 0$ funktionen $f(x)$ vara definierad genom

$$f(x) = \int_0^{x^2-x} \frac{1}{1+t^6} dt.$$

- (a) Avgör om $f(x)$ har ett minsta värde och ange i så fall för vilket x det antas.
- (b) Avgör om $f(x)$ har ett största värde och ange i så fall för vilket x det antas.