Förslag till lösningar, Envariabel, MMG200

11 januari 2013

1.

(i)&(ii) Se kurslitteraturen.

(iii) $|x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar då $x = 0$.

(iv) Vi har

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2} \ .$$

2. Se kurslitteraturen.

3. Vi har $D \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Speciellt får vi

$$f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = -\sqrt{2} \ .$$

4.

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(\sqrt{x}e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 xe^{2x}dx = \text{(Part.int.)}$$

$$= \pi \left([xe^{2x}/2]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}/2dx \right) = \pi \left(e^2/2 - [e^{2x}/4]_0^1 \right)$$

$$= \pi \left(e^2/2 - e^2/4 + 1/4 \right) = \frac{\pi}{4}(e^2+1) \ .$$

5. Division med x ger $y' + \dfrac{1-x}{x}\, y = \dfrac{1}{x}$. Nu är

$$\int \frac{1-x}{x}dx = \int \frac{1}{x} - 1dx = \ln x - x \ .$$

Så den integrerande faktorn är $e^{\ln x - x} = e^{\ln x}e^{-x} = xe^{-x}$. Multiplikation med denna ger $(xe^{-x}y)' = e^{-x}$ och vi får $xe^{-x}y = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$ och

$$y(x) = -\frac{1}{x} + C\,\frac{e^x}{x} \ .$$

Eftersom $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ måste vi ha $C = 0$. Den sökta lösningen är alltså $y(x) = -1/x$.

6. (a) Vi har $|\cos x/\sqrt{x}| \leq 1/\sqrt{x}$ och $\int_0^1 1/\sqrt{x}\, dx < \infty$. Så $\int_0^1 \cos x/\sqrt{x}\, dx$ är (absolut)konvergent.

   (b) Integralen är (absolut)konvergent ty

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty \, .$$

   (c) Partialintegration ger

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 + \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$$

   och integralen är konvergent enligt (b).

7. Taylorutveckling ger $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + O(t^3), t \to 0$ så

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6), x \to 0 \, .$$

Vidare är $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + O(t^6), t \to 0$ så

$$\cos \sqrt{2}x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + O(x^6), x \to 0 \, .$$

Detta ger

$$\frac{e^{-x^2} - \cos \sqrt{2}x}{x^4} = \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^6)}{x^4}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{6})x^4 + O(x^6)}{x^4} = \frac{1}{3} + O(x^2) \to \frac{1}{3} \, , x \to 0 \, .$$

8. (a) Eftersom integranden är positiv blir integralen minimal då övre gränsen $x^2 - x$ är minimal. Då $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ blir minimal då $x = \frac{1}{2}$ blir integralen det också. Alltså har $f(x)$ ett minsta värde som antas då $x = \frac{1}{2}$.

   (b) Eftersom

$$\int_0^{x^2-x} \frac{dt}{1+t^6} < \lim_{x\to\infty} \int_0^{x^2-x} \frac{dt}{1+t^6} dt = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^6} < \infty$$

   för alla $x \geq 0$ har $f(x)$ inte något största värde.