Förslag till lösningar, Envariabel, MMG200

13 april 2012

1. (a) Se kurslitteraturen.

   (b) Vi har

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \ .$$

   (c) Nej. Motexempel: Funktionen $f(x) = |x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar då $x = 0$.

2. Se kurslitteraturen.

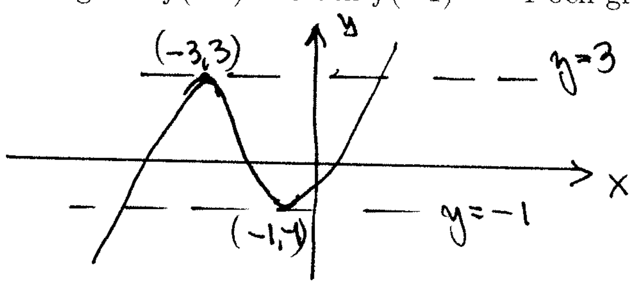
3. (a) Om $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ så är

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x+1)(x+3),$$

   och vi får följande teckentabell:

	-3		-1	
$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +$
$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$
	max		min	

   Så f har ett lokalt maximum då $x = -3$ och ett lokalt minimum då $x = -1$. Dessutom gäller $f(-3) = 3$ och $f(-1) = -1$ och grafen blir.



   (b) Från figuren ser vi att ekvationen $f(x) = 0$ har en rot då $a < -1$ och $a > 3$.

(c) Att $g(x) = 0$ är detsamma som att $f(x) = -1000$ och enligt (b) har ekvationen $g(x) = 0$ en rot.

4.

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x}, x = t^2 & 0 \mapsto 0 \\ dx = 2tdt, & \pi^2 \mapsto \pi \end{bmatrix} =$$

$$\int_0^{\infty} 2t \sin t dt = \begin{bmatrix} \text{Partiell} \\ \text{integration} \end{bmatrix} =$$

$$[-2t\cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos t dt = 2\pi + 2[\sin t]_0^{\pi} = 2\pi \ .$$

5. Om $f(x) = x^6 e^{-x^2-4x}$ gäller

$$f'(x) = \ldots = 2x^5 e^{-x^2-4x}(3 - 2x - x^2) \ .$$

(a) Vi får $f'(1) = 0$ och tangentens ekvation är $y = e^{-5}$.

(b) Nu gäller $f'(2) = -320e^{-12}$ så riktningskoefficienten för normalen är $320\, e^{12}$. Ekvationen blir alltså

$$\frac{y - 64e^{-12}}{x - 2} = \frac{e^{12}}{320} \text{ eller } y = \frac{e^{12}}{320}(x - 2) + 64e^{-12} \ .$$

(c) f är kontinuerlig, $f(0) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och $f(1) = e^{-5} > 0$. Det enda nollstället till derivatan är $x = 1$. Det följer att f antar sitt största värde e^{-5} då $x = 1$.

6. Vi skriver ekvationen som $\dfrac{dx}{x(1000 - x)} = k\, dt$. Partialbråksuppdelning ger $\dfrac{dx}{x(1000 - x)} = \dfrac{1}{1000}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1000 - x}\right)$. Vi får

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1000 - x}\right) dx = 1000k dt = K dt \ .$$

Integration ger $\ln \dfrac{x}{1000 - x} = Kt + C$.

$t = 0$ ger $C = \ln \dfrac{100}{900} = -\ln 9$. $t = 1$ ger $K = \ln \dfrac{250}{750} - C = -\ln 3 + \ln 9 = \ln 3$. Sätter vi $t = 2$ får vi $\ln \frac{x(2)}{1000 - x(2)} = 2\ln 3 - \ln 9 = 0$, vilket ger $\frac{x(2)}{1000 - x(2)} = 1$ och slutligen $x(2) = 500\,\text{kg}$.

7. (a) Vi har $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4})} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, så

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4})} \cos x = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

(b) Vi har

$$\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4 \to 12, x \to 2 .$$

(c) Förlängning med konjugatuttrycket $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$ ger

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \to 0, x \to \infty .$$

8. Eftersom $\frac{\sin x}{1+x^2}$ är udda gäller $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$ och alltså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\sin x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \pi .$$