Förslag till lösningar, Envariabel, MMG200

13 januari 2012

1&2. Se kurslitteraturen.

3. (a) Vi har
$$\frac{e^{6x}-1}{e^{8x}-1} = \frac{8x}{e^{8x}-1} \cdot \frac{e^{6x}-1}{6x} \cdot \frac{6}{8} \to \frac{6}{8}, x \to 0$$
eftersom $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

   (b) Vi har
$$\frac{\sin(5x)}{2x\cos x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \frac{1}{\cos x} \to \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{2} \ .$$

   (c) Gränsvärdet existerar inte (inte ens som oegentligt gränsvärde). Vi har
$$\lim_{n\to\infty} 2\pi n \sin 2\pi n = 0 \ ,$$
och
$$(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \to \infty, n \to \infty \ .$$

4.
$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{cc} t = \sqrt{x}, x = t^2 & 0 \mapsto 0 \\ dx = 2tdt, & \infty \mapsto \infty \end{array} \right] =$$
$$\int_0^\infty 2te^{-t} dt = \left[\begin{array}{l} \text{Partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right] = [-2te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty 2e^{-t} dt = [-2e^{-t}]_0^\infty = 2 \ .$$

5. Den homogena ekvationen har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 2 = 0$ med rötterna $r = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. Så
$$y_h(x) = e^x(A\cos x + B\sin x) \ .$$
För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = Ce^x$. Då är $y_p''(x) = y_p'(x) = y_p(x) = Ce^x$ så vi får $(1-2+2)Ce^x = e^x$. Alltså är $C = 1$ och
$$y_p(x) = e^x \ .$$

Den allmänna lösningen blir

$$y(x) = y_h(x)+y_p(x) = e^x(A\cos x+B\sin x)+e^x = e^x(1+A\cos x+B\sin x)\ .$$

6. (a) Vi har $f'(x) = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$. Så $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$ och $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Tangenten ges därför av

$$\frac{y-1}{x-\frac{\pi}{2}} = -1 \text{ eller } x + y = 1 + \frac{\pi}{2}\ .$$

(b) Om $\pi \leq x \leq \pi + \frac{\pi}{4}$ är $\cos x < 0$, $\cos x - \sin^2 x < 0$ och $f'(x) < 0$. Alltså är f avtagande och det största värdet antas då $x = \pi$ och är $f(\pi) = 0$.

(c) Vi har $\cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Så om $2\pi \leq x \leq 2\pi + \frac{\pi}{4}$ gäller $\cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\sin x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Detta ger $\cos x - \sin^2 x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} > 0$. Så $f'(x) > 0$, $f(x)$ är växande och det största värdet antas då $x = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ och är $f(2\pi + \frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1/\sqrt{2}}$.

(d) Ytterligare en derivering ger

$$f''(x) = e^{\cos x}(-\sin x - 2\sin x\cos x - \sin x(\cos x - \sin^2 x))$$

$$= -\sin x e^{\cos x}(1 + 3\cos x - \sin^2 x)\ .$$

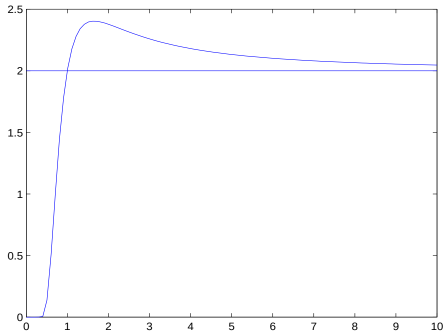
Nu är $1 + 3\cos x - \sin^2 x > 0$ om $0 \leq x < \pi/2$ och alltså speciellt på $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}]$. Så $f''(x) < 0$ och $f(x)$ är konkav.

7. Låt $f(x) = 2x^{1/x^2}$. Då gäller

$$f'(x) = 2De^{\ln x^{1/x^2}} = 2De^{x^{-2}\ln x} = 2e^{x^{-2}\ln x}D(x^{-2}\ln x)$$

$$= 2x^{1/x^2}(-2x^{-3}\ln x + \frac{x^{-2}}{x}) = 2x^{\frac{1}{x^2}-3}(1 - 2\ln x)\ .$$

Om $x < e^{1/2}$ är $f'(x) > 0$ och f är växande. Är $x > e^{1/2}$ är $f'(x) < 0$ och f är avtagande. Så f har sitt maximum i $x = e^{1/2}$ och värdet är $f(e^{1/2}) = 2(\sqrt{e})^{1/e} = 2e^{1/2e}$. Dessutom gäller $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, så vi har följande graf.



Från denna kan vi avläsa antalet nollställen:

a	Antal nollställen
$a \leq 0$	0
$0 < a \leq 2$	1
$2 < a < 2e^{1/2e}$	2
$a = 2e^{1/2e}$	1
$a > 2e^{1/2e}$	0

8. Vi har

$$\lim_{y\to+\infty} y^3 \int_0^1 x^2 e^{-(yx)^2}\, dx = \lim_{y\to+\infty} \int_0^1 (yx)^2 e^{-(yx)^2} y dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = yx & 0 \mapsto 0 \\ dt = ydx, & 1 \mapsto y \end{array} \right] = \lim_{y\to+\infty} \int_0^y t^2 e^{-t^2} dt = \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt \; .$$

Att integralen konvergerar (dvs. gränsvärdet existerar) beror på det snabba avtagandet hos e^{-t^2} då $t \to \infty$: Om $t \geq 2$ så gäller $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$ och $t^2 e^{-t^2} = t^2 e^{-t} e^{-t} \leq C e^{-t}$ eftersom $\lim_{t\to\infty} t^2 e^{-t} = 0$. Så

$$\int_2^\infty t^2 e^{-t^2} dt \leq C \int_2^\infty e^{-t} dt < \infty \; .$$