Matematik
Göteborgs universitet
H.C. & H.S.K.

Inga hjälpmedel
Telefonvakt:
Christoffer Standar
0703-08 83 04

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Onsdag den 23 april 2014, $8^{30} - 12^{30}$

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge fyra poäng.

1. (a) Antag att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och att $g(x)$ är begränsad. Visa att $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0$.

   (b) Antag att $\lim_{x\to 0} f(x) = A$ och att $\lim_{x\to 0} g(x) = B$. Visa att

   (i) $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = A + B$.

   (ii) $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = AB$.

2. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats.

   (OBS. Integralkalkylens!)

3. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty 2x^3 e^{-x^2}\,dx \ .$$

4. Beräkna följande gränsvärden.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\ln(x+1)^2}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x \cdot \arctan x \cdot \ln x}{\sqrt{x}}$.

5. En ö har invaderats av minkar. Biologer bedömer att antalet minkar kan beskrivas med differentialekvationen $y'(t) = Ay(t)(1000-y(t))$. Här är $y(t)$ antalet minkar efter t år och A en obekant konstant. I januari 2013 beräknades antalet minkar till 100 stycken och ett år senare till 250 stycken. Hur många minkar förväntas man finna i januari 2015?

Vänd!

6. Definiera funktionen $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ genom $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.

   (a) Bestäm största och minsta värde av f.

   (b) För vilka värden på konstanten a har ekvationen $f(x) = a$ precis två positiva lösningar?

7. Området D i planet begränsas av kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 1$ och x-axeln. Bestäm volymen av den kropp som bildas då

   (a) D roterar kring x-axeln,

   (b) D roterar kring y-axeln.

8. Man kan visa att differentialekvationen

$$\begin{cases} xy'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

   har en entydig lösning $y = f(x)$ som är oändligt deriverbar. Bestäm Taylorpolynomet kring origo (Maclaurinpolynomet med bokens terminologi) till f av grad fyra.