# Lösningsförslag

## Envariabelanalys, MMG200,23 april 2014

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. Vi har

$$\int_0^\infty 2x^3 e^{-x^2} dx = \begin{bmatrix} t = x^2, dt = 2xdx \\ 0 \mapsto 0, \infty \mapsto \infty \end{bmatrix} = \int_0^\infty te^{-t} dt = \begin{bmatrix} \text{Partiell} \\ \text{integration} \end{bmatrix}$$

$$= \left[-te^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt = 0 + \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1\ .$$

4. (a)
   Taylorutveckling eller l'Hospitals regel fungerar utmärkt. Alternativt kan man använda följande standardgränsvärden

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1,$$

och få

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\ln(x+1)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 + 1 - \cos x}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{\ln(x+1)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \left( \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} + \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} \right) \frac{\sin x}{x} \frac{x}{2\ln(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left( \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} + \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} \right) \frac{\sin x}{x} \frac{x}{2\ln(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left( \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} \right) \frac{\sin x}{x} \frac{x}{2\ln(x+1)} \\
&= \left( 1 + \frac{0}{1+\cos 0} \right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

   (b)
   Vi har att $\lim_{x\to\infty} \ln x/\sqrt{x} = 0$ (standardgränsvärde) och att $\sin x \cdot$

$\arctan x$ är begränsad ($|\sin x \cdot \arctan x| \leq \frac{\pi}{2}$ för alla $x$). Enligt sats (tentauppgift 1!) gäller då

$$\lim_{x\to\infty} \sin x \cdot \arctan x \cdot \ln x/\sqrt{x} = 0.$$

5. Differentialekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{dy}{y(t)(1000-y(t))} = A dx\ .$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{y(t)(1000-y(t))} = \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000-y}\right)$$

Låter vi $K = 1000A$ får vi

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000-y}\right) dy = K dx \text{ och } \ln\frac{y}{1000-y} = Kt + C\ .$$

Vi ställer klockan så att $t = 0$ svarar mot år 2013. Det betyder att $y(0) = 100$ vilket ger $\ln\dfrac{1}{9} = C$ eller $C = -2\ln 3$. Dessutom ger $y(1) = 250$ att $\ln\dfrac{1}{3} = K - 2\ln 3$ och $K = -\ln 3 + 2\ln 3 = \ln 3$. Så $\ln\dfrac{y}{1000-y} = (t-2)\ln 3$. Till sist ger $t = 2$ att $\ln\dfrac{y(2)}{1000-y(2)} = 0$. Så $\dfrac{y(2)}{1000-y(2)} = 1$ och $y(2) = 500$.

6. Vi börjar med att derivera $f(x)$.

$$f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x)e^{-x} = -(x^2-2)e^{-x},$$

så derivatans nollställen är $\pm\sqrt{2}$, varav vi bara är intresserade av $\sqrt{2}$. Teckentabell visar att $f$ är strängt växande på intervallet $[0, \sqrt{2})$ och strängt avtagande på intervallet $(\sqrt{2}, \infty)$. Alltså har $f$ maximum då $x = \sqrt{2}$ som är $f(\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$. Eftersom $f(0) = 0$ och $f(x) > 0$ för $x > 0$ är minsta värdet $f(0) = 0$.

(b)
Vi vet att $f$ växer från 0 till $(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$ på intervallet $[0, \sqrt{2}]$ och att $f$ är positiv och avtagande på intervallet $(\sqrt{2}, \infty)$. Eftersom dessutom

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^2+2x)e^{-x} = 0$$

och $f$ är kontinuerlig har ekvationen $f(x) = a$, enligt satsen om mellanliggande värden, precis två lösningar för $0 < a < (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$. (Ekvationen har inga lösningar om $a < 0$ eller $a > (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$; ekvationen har precis en lösning om $a = 0$ eller $a = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$.)

7. (a)
Skivformeln ger

$$V = \int_0^\pi dV(x) = \int_0^\pi A(x)dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 dx = [\text{symmetri}] =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^2 x + \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi 1\, dx = \frac{\pi^2}{2} \ .$$

Anmärkning. Man kan också beräkna integralen genom att använda formeln $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Det ger

$$\int_0^\pi \sin^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 - \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \ .$$

(b)
Genom att integrera över sfäriska skal får vi

$$V = \int_0^\pi dV(x) = \int_0^\pi A(x)dx = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx$$

$$= 2\pi \left( [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \right) = 2\pi \left(\pi + [\sin x]_0^\pi\right) = 2\pi^2 \ .$$

8. Låt $f(x) = P(x) + \mathcal{O}(x^5), x \to 0$, där $P(x) = a_0 + a_1 x + = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ är det sökta Taylorpolynomet. Då gäller

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \mathcal{O}(x^5)), x \to 0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \mathcal{O}(x^4)), x \to 0$$

och

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \mathcal{O}(x^3)), x \to 0 \ .$$

Villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ ger $a_0 = 0$ respektive $a_1 = 1$. Så

$$P(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \ .$$

Differentialekvationen ger

$$xf''(x) + 4f(x) = xP''(x) + 4P(x) + \mathcal{O}(x^4)$$

$$= (2a_2 + 4)x + (6a_3 + 4a_2)x^2 + (12a_4 + 4a_3)x^3 + \mathcal{O}(x^4), x \to 0 \; .$$

Detta ger $2a_2 + 4 = 0$, $6a_3 + 4a_2 = 0$ och $12a_4 + 4a_3 = 0$, som successivt ger $a_2 = -2$, $a_3 = \frac{4}{3}$ och $a_4 = -\frac{4}{9}$. Så

$$P(x) = x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^4 \; .$$