

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Måndag den 26 augusti 2013, 8.30–12.30

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge fyra poäng.

1. (a) Formulera *integralkalkylens* medelvärdessats.

(b) Bevisa den.

(c) Visa att $2 \leq \int_{-1}^1 e^{x^2} dx \leq 6$.

2. Formulera medelvärdessatsen och bevisa den i fallet att $f(a) = f(b) = 0$.

3. Beräkna följande gränsvärden.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\ln(1+x)}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x}$$

4. Beräkna $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$.

5. Bestäm alla lösningar (även komplexa) till följande ekvation och ange deras multiplicitet.

$$z^3 + (1 + 2i)z^2 - 2z - 2i = 0.$$

6. Bestäm för $x > 1$ den funktion $y = y(x)$ som uppfyller

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{x}, \quad y(e) = \frac{3}{2}.$$

Vänd!

7. Låt $f(x) = \ln\left(\frac{5}{2}x^2 - x + \frac{17}{10}\right) - x$.

- a) Visa att $f(x)$ är deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$.
- b) Beräkna största värdet av f på intervallet $[1, \infty)$.
- c) Visa att f har minst ett nollställe i intervallet $[1, \infty)$.

8. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt .$$