Matematik
Göteborgs universitet
H.C. & H.S.K.

Lösningsförslag
Envariabelanalys, MMG200

1. (a) och (b) Se kurslitteraturen.

   (c) e^{x^2} är kontinuerlig så integralkalkylens medelvärdessats ger att $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx = 2e^{\xi^2}$ för något ξ mellan -1 och 1. Men $1 = e^0 \le e^{\xi^2} \le e^1 \le 3$ då $-1 \le \xi \le 1$ och påståendet följer.

2. Se kurslitteraturen.

3. a) Faktorisera täljaren: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Alltså är
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x - 3 = 2 - 3 = -1.$$

   b) Använd Taylorutveckling eller återför på standardgränsvärdena $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$ och $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)/x = 1$:
$$\begin{aligned} \frac{\tan(2x)}{\ln(1+x)} &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \cdot \frac{1}{\ln(1+x)} \\ &= \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2}{\cos(x)} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \to 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2, \text{ då } x \to 0. \end{aligned}$$

   c) Använd Taylorutveckling eller återför på standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$:
$$\begin{aligned} \frac{e^x - \cos(x)}{x} &= \frac{e^x - 1}{x} - \frac{\cos(x) - 1}{x} \\ &= \frac{e^x - 1}{x} - \frac{\cos(x) - 1}{x} \cdot \frac{\cos(x) + 1}{\cos(x) + 1} \\ &= \frac{e^x - 1}{x} - \frac{\cos^2(x) - 1}{x(\cos(x) + 1)} \\ &= \frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin^2(x)}{x(\cos(x) + 1)} \\ &= \frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1} \\ &\to 1 + 1 \cdot \frac{0}{2} = 1, \text{ då } x \to 0. \end{aligned}$$

4. Vi har

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{rl} t=\sqrt{x}, & 0\mapsto 0 \\ x=t^2, & \infty\mapsto\infty \\ dx=2tdt & \end{array}\right] = \int_0^\infty 2te^{-t}dt = [PI]$$

$$= [-2te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty 2e^{-t}dt = 0 + [-2e^{-t}]_0^\infty = 2\ .$$

5. Observera att $z=1$ är en lösning till ekvationen. Polynomdivision ger

$$\frac{z^3+(1+2i)z^2-2z-2i}{z-1} = \cdots = z^2+2(1+i)z+2i$$

Så det återstår att lösa $z^2+2(1+i)z+2i=0$. Kvadratkomplettering ger att

$$z^2+2(1+i)z+2i=(z+1+i)^2$$

så $z=-1-i$ är den enda lösningen till $z^2+2(1+i)z+2i=0$ och den har multiplicitet 2.

Alltså, lösningarna till $z^3+(1+2i)z^2-2z-2i=0$ är $z=1$, med multiplicitet 1, och $z=-1-i$ med multiplicitet 2.

6. Eftersom $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)$ är den integrerande faktorn $e^{\ln(\ln x)} = \ln x$. Vi får $(y\ln x)' = \dfrac{\ln x}{x}$ och $y(x)\ln x = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$. Villkoret $y(e)=\frac{3}{2}$ ger, eftersom $\ln e = 1$ att $C=1$. Alltså är $y(x)\ln x = \dfrac{1}{2}\ln^2 x + 1$ och $y(x) = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{\ln x}$.

7. a) Låt $g(x)=\frac{5}{2}x^2-x+\frac{17}{10}$, som är deriverbar för alla $x\in\mathbb{R}$ eftersom polynom är deriverbara. Man verifierar dessutom, t.ex. med kvadratkomplettering, att $g(x)>0$ för alla $x\in\mathbb{R}$, d.v.s. värdemängden för g är innehållen i de positiva reella talen. Vidare är $\ln(y)$ deriverbar för alla positiva reella y. Enligt sats i boken är då den sammansatta funktionen $\ln(g(x))$ deriverbar för alla $x\in\mathbb{R}$. Eftersom $f(x)=\ln(g(x))-x$ och x är deriverbar för alla $x\in\mathbb{R}$ blir $f(x)$ deriverbar för alla $x\in\mathbb{R}$.

   b) Vi har att

$$f'(x) = \frac{5x-1}{g(x)} - 1 = -\frac{5}{2}\frac{x^2-\frac{12}{5}x+\frac{27}{25}}{g(x)}$$

så nollställena till f' ges av ekvationen $x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{27}{25} = 0$, som har lösningarna $x = 3/5$ och $x = 9/5$. Teckentabell visar att f är växande på intervallet $[1, 9/5]$ och avtagande på $[9/5, \infty)$ så största värdet av $f(x)$ på intervallet $[1, \infty)$ (existerar och) antas för $x = 9/5$, d.v.s. största värdet av $f(x)$ på $[1, \infty)$ är

$$f(9/5) = \cdots = 3\ln(2) - 9/5.$$

c) Vi har att $f(1) = \ln(32/10) - 1$. Eftersom ln är växande och $e < 3$ är $f(x) = \ln(32/10) - 1 > \ln(3) - 1 > \ln(e) - 1 = 0$. Dessutom har vi att

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\frac{5}{2}x^2 - x + \frac{17}{10}) - x \\ &= \ln(\frac{5}{2} - \frac{1}{x} + \frac{17}{10x^2}) + 2\ln(x) - x \\ &= \ln(\frac{5}{2} - \frac{1}{x} + \frac{17}{10x^2}) - x(1 - \frac{2\ln(x)}{x}) \\ &\to -\infty, \quad \text{då } x \to \infty \end{aligned}$$

eftersom

$$\ln(\frac{5}{2} - \frac{1}{x} + \frac{17}{10x^2}) \to \ln(5/2) \quad \text{och} \quad \frac{\ln(x)}{x} \to 0, \quad \text{då } x \to \infty.$$

För tillräckligt stora x är alltså $f(x) < 0$; eftersom f är en deriverbar funktion, och alltså speciellt kontinuerlig, och dessutom $f(1) > 0$ följer det från satsen om mellanliggande värden att f har (minst) ett nollställe i $[1, \infty)$.

8. Skriv

$$x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt = x\int_x^1 \frac{1}{t^2}dt + x\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt\ .$$

Nu gäller

$$x\int_x^1 \frac{1}{t^2}dt = x\left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) \to 1\ , x \to 0\ .$$

Dessutom, eftersom $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt$ är konvergent, gäller

$$x\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt \to 0\int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt = 0\ .$$

Det sökta gränsvärdet är alltså 1.