Matematik
Göteborgs universitet
H.C. & H.S.K.

Inga hjälpmedel
Telefonvakt:
Christoffer Standard
0703-08 83 04

# Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Onsdag den 3 april 2013, 8.30-12.30

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge fyra poäng.

1. (a) Formulera integralkalkylens huvudsats. (I boken kallas den analysens huvudsats.) (1p)

   (b) Bevisa integralkalkylens huvudsats. (2p)

   (c) Bestäm derivatan av funktionen $F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$. (1p)

2. Visa att om $f$ har extremvärde i en inre punkt $x_0$ i definitionsintervallet och om $f$ är deriverbar i $x_0$ så är $f'(x_0) = 0$.

3. Definiera $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1} & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$$

   (a) Beräkna $\lim_{x\to 1} f(x)$. (2p)

   (b) Är $f$ kontinuerlig i $x = 1$? (1p)

4. Beräkna

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx \ .$$

5. Bestäm största och minsta värde av $f(x) = e^{x/\sqrt{3}} \cos x$ på intervallet $[0, \pi]$.

6. En en meter hög cylindrisk tank är fylld med vatten. En kran i tankens botten öppnas och vattnet börjar rinna ut. Efter en timme är vattenhöjden i tanken 25 cm. Hur lång tid tar tills tanken är helt tom?

   Antag att utströmmningen följer Torricellis lag: Utströmningshastigheten är proportionell mot kvadratroten ur vattenytans höjd.

7. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\pi/2} \frac{e^{x/n}-1}{x} \sin x dx \ .$$

8. Antag att $f$ är en reellvärd och deriverbar funktion som uppfyller

$$\left(f(x)\right)^3 + f(x) - 2x^3 = 0.$$

   (a) Beräkna $f(1)$ och $f'(1)$. (1p)

   (b) Visa att $f$ är strängt växande (och alltså injektiv). (1p)

   (c) Beräkna $(f^{-1})'(1)$. (1p)