Matematik
Göteborgs universitet
H.C. & H.S.K.

Lösningsförslag
Envariabelanalys, MMG200

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. Polynomdivision ger

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1} = x^2 - 5x + 6$$

och alltså är

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1} = \lim_{x\to 1} x^2 - 5x + 6 = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2.$$

Eftersom $f(1) = 0 \neq 2 = \lim_{x\to 1} f(x)$ är f inte kontinuerlig.

4. Vi har

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x}, & x = t^2 & dx = 2tdt, \\ 0 \to 0 & \infty \to \infty & \end{bmatrix} =$$

$$2\int_0^\infty te^{-t}dt = [\text{Part.int.}] = 2[-te^{-t}]_0^\infty - 2\int_0^\infty e^{-t}dt = 2[-e^{-t}]_0^\infty = 2\ .$$

5. Vi har att

$$f'(x) = \frac{e^{x/\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\cos x - e^{x/\sqrt{3}}\sin x$$

så derivatans nollställen ges av ekvationen

$$e^{x/\sqrt{3}}(\frac{\cos x}{\sqrt{3}} - \sin x) = 0$$

som är ekvivalent med $\tan x = 1/\sqrt{3}$ (OBS att $\cos x = 0$ inte ger nån lösning). I intervallet $[0, \pi]$ är den enda lösningen till denna ekvation

$x = \pi/6$. Teckentabell för f' visar att f är växande på intervallet $[0, \pi/6]$ och avtagande på intervallet $[\pi/6, \pi]$. Största värde är därför

$$f(\pi/6) = e^{\pi/(6\sqrt{3})} \cos \pi/6 = e^{\pi/(6\sqrt{3})}\sqrt{3}/2.$$

Minsta värdet är antingen $f(0)$ eller $f(\pi)$. Eftersom $f(0) = 1$ och $f(\pi) = e^{\pi/\sqrt{3}} \cos \pi = -e^{\pi/\sqrt{3}} < 0$ är minsta värdet $-e^{\pi/\sqrt{3}}$.

6. Låt $h(t)$ vara vattenytans höjd vid tiden t. Då är vattenvolymen $V(t) = Bh(t)$ där B är bottenarean. Torricellis lag ger $V'(t) = k\sqrt{h(t)}$. Men $V'(t) = Bh'(t)$ och vi får

$$\begin{cases} h'(t) = K\sqrt{h(t)} \\ h(0) = 1, h(1) = 1/4\ . \end{cases}$$

Differentialekvationen är separabel. Vi får

$$2\sqrt{h} = \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = K \int dt = Kt + C$$

eller

$$\sqrt{h(t)} = K_1 t + C_1\ .$$

$h(0) = 1$ ger $C_1 = 1$, och $h(1) = 1/4$ ger $1/2 = K_1 + 1$ och $K_1 = -1/2$. Alltså är $h(t) = -t/2 + 1$. Tillsist ger $h(t) = 0$ att $0 = -t/2 + 1$ och $t = 2$.

7. Eftersom

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{e^{x/n} - 1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x/n} - 1}{x/n} = 1$$

verkar det troligt att

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\pi/2} \frac{e^{x/n} - 1}{x} \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1\ .$$

Ett bevis följer med Taylors formel. Vi har

$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{t + e^{\xi_t}t^2/2}{t} = 1 + \frac{1}{2}e^{\xi_t}t\ .$$

Använder vi detta med $t = x/n$ och observerar att $x/n \leq \pi/2$ har vi

$$n \int_0^{\pi/2} \frac{e^{x/n} - 1}{x} \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{x/n} - 1}{x/n} \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx + I_n = 1 + I_n$$

där

$$|I_n| \leq \frac{1}{2}e^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{x}{n} \sin x\, dx \to 0, n \to \infty\ .$$

8. Vi beräknar först $f(1)$. Eftersom

$$(f(x))^3 + f(x) - 2x^3 = 0 \tag{1}$$

uppfyller $f(1)$ tredjegradsekvationen $y^3 + y - 2 = 0$. En lösning till denna är $y = 1$. Polynomdivision ger att $y^3 + y - 2 = (y-1)(y^2 + 2y + 2)$ och, eftersom $y^2 + 2y + 2 = (y+1)^2 + 1 > 0$ för alla reella y, är $y = 1$ den enda reella lösningen. Då f är reellvärd måste alltså $f(1) = 1$.

För att beräkna $f'(1)$ deriverar vi (1) och får

$$3(f(x))^2 f'(x) + f'(x) - 6x^2 = 0. \tag{2}$$

Sätter vi in $x = 1$ och utnyttjar att $f(1) = 1$ får vi att $3f'(1) + f'(1) - 6 = 0$ vilket ger att $f'(1) = 3/2$.

Om vi löser ut $f'(x)$ ur (2) får vi att $f'(x) = 6x^2/(3(f(x))^2 + 1)$. Eftersom $3x^2 + 1 > 0$ och $6x^2 \geq 0$ för alla reella x måste $f'(x) \geq 0$ och alltså är f växande.

För att beräkna $(f^{-1})'(1)$ använder vi att $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$ (som följer av kedjeregeln). Väljer vi nu $x = 1$ och utnyttjar att $f(1) = 1$ får vi att $(f^{-1})'(1) = 1/(3/2) = 2/3$.