Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Måndag den 25 augusti 2014, 14.00 – 18.00

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge fyra poäng.

1. (a) Formulera Taylors formel med Taylorpolynom av grad 2 och med Lagranges restterm.

   (b) Bevisa Taylors formel med Taylorpolynom av grad 2 i en omgivning av $x = 0$ (Maclaurins formel med bokens terminologi) och resttermen på integralform.

2. Formulera och bevisa kedjeregeln.

3. Bestäm största och minsta värde av $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ på intervallet $[0, 2]$.

4. Beräkna
$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, e^{\sqrt{\sin x}} dx \ .$$

5. Låt $f(x) = (\ln x)^x$ för $x > 1$.

   (a) Beräkna tangenten till grafen av f i den punkt där $x = e$. (2p)

   (b) Beräkna $\lim_{x \to 1^+} f(x)$. (1p)

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$yy' = \sin x, \ 0 < x < \pi,$$
som för $x = \pi/2$ antar värdet $\sqrt{2}$.

Var god vänd!

7. Ett hus med direktverkande eluppvärmning har innertemperaturen 22°. Någon gång under natten blir det elavbrott. Klockan 8.00 var temperaturen 20° och klockan 9.00 hade den sjunkit ytterligare till 19°. Yttertemperaturen var hela tiden 10°. När inträffade elavbrottet?

   Antag att temperaturen uppfyller Newtons avsvalningslag, dvs. att den hastighet som hustemperaturen minskar med är proportionell mot skillnaden mellan inner och yttertemperatur.

   (Du får svara med typ ”a timmar före 8.00”, där a uttrycks med elementära funktioner.)

8. En reellvärd funktion g är två gånger deriverbar på ett intervall I innehållande 0 och uppfyller $g''(x) - 2g(x)g'(x) = 0$ för $x \in I$ samt att $g(0) = 0$ och $g'(0) = 1$. Visa att $x = 0$ är den enda lösningen till ekvationen $g(x) = 0$ i I.