Lösningsförslag
Envariabelanalys, MMG200
Tenta den 25 augusti 2014

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. Vi börjar med att derivera:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$$

Så derivatans nollställen är $x = 1$ och $x = 2$. Största och minsta värde antas antingen där derivatan är 0 eller i randpunkter. Eftersom

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 3$$

är -1 funktionens minsta värde och 4 dess största.

4.
$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, e^{\sqrt{\sin x}} dx = \begin{bmatrix} t = \sin x & 0 \mapsto 0 \\ dt = \cos x dx & \pi/2 \mapsto 1 \end{bmatrix} =$$
$$\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt = \begin{bmatrix} s = \sqrt{t}, t = s^2 & 0 \mapsto 0 \\ dt = 2sds & 1 \mapsto 1 \end{bmatrix} =$$
$$2\int_0^1 se^s ds = [PI] = 2\left([se^s]_0^1 - \int_0^1 e^s ds \right) =$$
$$2\left(e - [e^s]_0^1\right) = 2\left(e - [e^s]_0^1\right) = 2\,(e - e + 1) = 2\;.$$

5. (a) Efter omskrivningen $f(x) = (\ln x)^x = e^{x \cdot \ln(\ln x)}$ kan vi beräkna

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(\ln x)} \cdot (\ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}) = (\ln x)^x \cdot (\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}).$$

Alltså är $f'(e) = 1^e \cdot (\ln 1 + 1/1) = 1$. Eftersom dessutom $f(e) = 1^e = 1$ blir tangentens ekvation

$$y - 1 = 1 \cdot (x - e)$$

som förenklas till

$$y = x + 1 - e.$$

(b) Vi har att $\ln x \to 0^+$ då $x \to 1^+$ så $\lim_{x\to 1^+} \ln(\ln x) = -\infty$. Alltså är $\lim_{x\to 1^+} x\ln(\ln x) = -\infty$ och således

$$\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^x = \lim_{x\to 1^+} e^{x\cdot\ln(\ln x)} = 0.$$

6. Differentialekvationen är separabel. Vi skriver den som $ydy = \sin x\, dx$, och får $\frac{1}{2}y^2 = -\cos x + C$. Villkoret $y(\pi/2) = \sqrt{2}$ ger $1 = 0 - C$, dvs. $C = 1$. Vi har alltså $y^2 = 2(1 - \cos x)$. Detta ger lösningen $y = \sqrt{2(1-\cos x)}$.

   $y = -\sqrt{2(1-\cos x)}$ utesluts ty den har värdet $-\sqrt{2}$ då $x = \pi/2$. Skarvning kan inte förekomma.

7. Vi låter $T(t)$ vara skillnaden mellan inner- och ytter-temperaturen där t är tiden i timmar mätt med en klocka där $t = 0$ då strömmavbrottet inträffar. I denna tid svarar 8.00 mot en tid t_0 (som det gäller att bestämma), och 9.00 svarar mot $t_0 + 1$. Så vi har

$$\begin{cases} T'(t) = -kT(t) & (1) \\ T(0) = 12 & (2) \\ T(t_0) = 10 & (3) \\ T(t_0 + 1) = 9 & (4) \end{cases}$$

(1) ger $T(t) = -Ce^{-kt}$ och (2) ger $C = 12$. Sedan ger (3) $10 = 12e^{-kt_0}$ eller

$$e^{-kt_0} = 5/6 \qquad (5).$$

(4) ger $12e^{-k(t_0+1)} = 9$ eller $e^{-kt_0}e^{-k} = 3/4$. Tillsammans med (5) ger detta

$$e^{-k} = \frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5} = \frac{9}{10} \qquad (6)$$

Slutligen ger (5) och (6) att

$$\left(e^{-k}\right)^{t_0} = e^{-kt_0} = \frac{5}{6}, \quad t_0 \ln\left(\frac{9}{10}\right) = \ln\left(\frac{5}{6}\right) \text{ och } t_0 = \frac{\ln(\frac{5}{6})}{\ln(\frac{9}{10})}.$$

Svar: Strömavbrottet inträffade $\ln\left(\frac{5}{6}\right) \Big/ \ln\left(\frac{9}{10}\right)$ timmar innan 8.00.

Anmärkning. Numeriskt gäller $\ln(\frac{5}{6})/\ln(\frac{9}{10}) \approx 1,73$ så strömavbrottet inträffade c:a 6.16.

8. Om vi integrerar $g'' - 2gg' = 0$ får vi

$$g' - g^2 = C$$

för någon konstant C. Eftersom $g(0) = 0$ och $g'(0) = 1$ måste $C = 1$. Diffekvationen $g' - g^2 = 1$ är separabel och kan lösas. Alternativt observerar vi att

$$g'(x) = 1 + g(x)^2 > 0, \quad x \in I,$$

eftersom g är reellvärd. Alltså är g stängt växande på I och kan därför högst ha ett nollställe i I. Eftersom $g(0) = 0$ är $x = 0$ den enda lösningen till $g(x) = 0$.