Lösningar, Envariabelanalys, MMG200

17 januari 2014

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. I punkten där $x = 1$ är $y = e^{-1^2} = 1/e$. Derivatan av e^{-x^2} är $-2xe^{-x^2}$ så kurvans lutning i aktuell punkt ges av $-2 \cdot 1 \cdot e^{-1^2} = -2/e$. Ekvationen för tangenten blir alltså

$$y - 1/e = -2/e\,(x-1)$$

och efter förenkling

$$y = -2x/e + 3/e.$$

4.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx \\
&\quad = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt \\ 0 \mapsto 0, \infty \mapsto \infty \end{array}\right] = 2\int_0^\infty t^2 e^{-t}dt \\
&= \left(\begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array}\right) = 2\left([-t^2e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty 2te^{-t}dt\right) \\
&\quad = \left(\begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array}\right) = 4\left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt\right) \\
&\quad = 4[-e^{-t}]_0^\infty = 4\ .
\end{aligned}$$

5. Vi bestämmer först de stationära punkterna. Vi har att

$$f'(x) = -\cos(\cos(x)) \cdot \sin(x).$$

Värdemängden för $\cos x$ är $[-1, 1]$ och på detta intervall är cos nollskild, alltså är $\cos(\cos(x))$ nollskild. Ekvationen $f'(x) = 0$ är således ekvivalent med $\sin x = 0$, som har lösningarna $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. I intervallet $[\pi/2, 3\pi/2]$ har vi alltså bara en stationär punkt; $x = \pi$. Teckentabell visar att $f(x)$ är avtagande på $[\pi/2, \pi]$ och växande på $[\pi, 3\pi/2]$. Minsta värdet är alltså $f(\pi) = \sin(\cos\pi) = \sin(-1) = -\sin 1$. Största värdet finns bland $f(\pi/2) = \sin(\cos(\pi/2)) = 0$ och $f(3\pi/2) = \sin(\cos(3\pi/2)) = 0$; största värdet är allstå 0.

6. Vi löser först den homogena ekvationen $y''+4y=0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2+4=0$ med rötterna $r=\pm 2i$. Så

$$y_h(x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi $y = ax^2+bx+c$ och får $y' = 2ax+b$ och $y'' = 2a$. Så $y''+4y = 2a+4(ax^2+bx+c) = 4ax^2+4bx+(2a+4c) = 4x^2-4x+10$. Detta ger $4a=4$, $4b=-4$ och $2a+4c=10$. Så $a=1$ $b=-1$, $c=2$ dvs.

$$y_p(x) = x^2-x+2.$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$y(x) = y_h(x)+y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + x^2 - x + 2.$$

$y(0)=3$ ger $A+2=3$ så $A=1$. Vidare är $y'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + 2x - 1$ och $y'(0) = 2B-1 = 1$ ger $B=1$.

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = y_h(x)+y_p(x) = \cos 2x + \sin 2x + x^2 - x + 2.$$

7. Vi gör först substitutionen $t = 1/x$ och gränsvärdet övergår i

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan(1+t)-\pi/4}{t}. \tag{1}$$

Eftersom $\arctan 1 = \pi/4$ kan man nu observera att detta gränsvärde per definition beräknar derivatan av arctan i punkten 1, dvs. gränsvärdet är $1/(1+1^2) = 1/2$.

Alternativt kan man Taylorutveckla arctan i punkten 1:

$$\arctan(1+t) = \pi/4 + 1/(1+1^2)\,t + \mathcal{O}(t^2) = \pi/4 + t/2 + \mathcal{O}(t^2).$$

Alltså blir (1)

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t/2+\mathcal{O}(t^2)}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1/2 + \mathcal{O}(t) = 1/2$$

även på detta sätt.

8. Vi observerar att $y(x) = 0$ för alla x är en lösning till $y' = 3y^{2/3}$.

För att hitta de andra lösningarna skriver vi ekvationen som

$$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx,$$

och får

$$y^{1/3} = x + C \text{ och } y(x) = (x + C)^3.$$

Att $y(0) = -1$ ger $C^3 = -1$, $C = -1$ och $y(x) = (x - 1)^3$.

Att $y(3) = 1$ ger $(3 + C)^3 = 1$, $3 + C = 1$, $C = -2$ och $y(x) = (x - 2)^3$.

Nu gäller det att skarva ihop dessa lösningar med $y = 0$ för att få en lösning som är definierad på $\mathbb{R}$. Vi låter

$$y(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^3, & x > 2 \end{cases} .$$

Derivatan av $(x - 1)^3$ är 0 när $x = 1$, och derivatan av $(x - 2)^3$ är 0 när $x = 2$. Så $y(x)$ blir deriverbar för alla x och uppfyller $y' = 3y^{2/3}$.