MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2015-08-27.

1. Se boken sidan 135.
2. Se boken sidorna 178-179.
3. Definitionerna finns på sidan 61 i boken.

   Exempel på funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som är

   - injektiv och surjektiv: $f(x) = x$
   - injektiv men inte surjektiv: $f(x) = x^3$
   - inte injektiv men surjektiv: $f(x) = x$ om $x < 0$, $f(x) = x-1$ om $x \geq 0$
   - varken injektiv eller surjektiv: $f(x) = x^2$

4. Vi har $\text{sgd}(12, 21) = 3$ och $3 \mid 186$ så därmed vet vi att det finns heltalslösningar. Vi kan förkorta med 3 och får då $4x+7y = 62$. Vi bestämmer först en lösning till $4x + 7y = 1$. Den generella metoden är att använda Euklides algoritm, men här ser vi enkelt $x = 2$ och $y = -1$ är en lösning. Därmed är $x = 2\cdot 62 = 124$ och $y = -1\cdot 62 = -62$ en lösning till ekvationen. Den allmänna lösningen till ekvationen är då

   $$x = 124 - 7n \text{ och } y = -62 + 4n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

   Vi bestämmer alla möjliga heltal n så att både x och y blir positiva. Det minsta n så att $y > 0$ är $n = 16$ vilket ger $(x, y) = (12, 2)$. Om vi tar $n = 17$ så får vi $(x, y) = (5, 6)$ och för $n > 17$ blir $x < 0$. Lösningar är alltså $(x, y) = (12, 2)$ och $(x, y) = (5, 6)$.

5. (a) Vi ska välja 4 bland 15 och det kan man göra på

   $$\binom{15}{4} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 \cdot 7 \cdot 13 = 1365$$

   sätt.

   (b) Vi ska först välja 1 bland 10 och sedan 3 bland 5 och det kan man göra på

   $$\binom{10}{1}\binom{5}{3} = 10 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 10 = 100$$

   sätt.

   (c) Enklast blir att räkna ut komplementet, d v s välja ingen blå boll, och subtrahera detta från svaret i första deluppgiften. Välja ingen blå boll är det samma som att välja 4 vita bollar och det kan man göra på

   $$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

   sätt. Svaret är alltså $1365 - 5 = 1360$.

6. Den högra olikheten följer av att alla termerna i summan är högst $\sqrt{n}$ med strikt olikhet för alla utom den sista termen. Eftersom det finns totalt n stycken termer får vi att

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n} = n \cdot \sqrt{n} = n^{3/2}.$$

För den vänstra olikheten använder vi induktion. Basfall: För $n = 2$ får vi att högerledet är $1 + \sqrt{2}$ och vänsterledet är $\frac{1}{2}2^{3/2} = \sqrt{2}$ så det stämmer då $n = 2$.

Induktionssteg: Antag nu att den önskade olikheten gäller då $n = m$ där m är ett godtyckligt valt heltal större än eller lika med 2. Vi ska visa att den då också gäller då $n = m + 1$. Vi får då för högerledet att

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{k} + \sqrt{m+1} > \frac{1}{2}m^{3/2} + \sqrt{m+1},$$

där olikheten följer av induktionsantagandet. Det räcker nu att visa att det sista uttrycket är minst lika stort som $\frac{1}{2}(m+1)^{3/2}$. För att göra det går det lika bra att visa att det gäller för kvadraterna av uttrycken vilket kommer att förenkla det för oss. Vi ska alltså visa att

$$\left(\frac{1}{2}m^{3/2} + \sqrt{m+1}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}(m+1)^{3/2}\right)^2$$

vilket blir

$$m^3 + 4(m+1) + 4m^{3/2}\sqrt{m+1} \geq (m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$$

om vi utvecklar kvadraterna och multiplicerar båda leden med 4. För vänsterledet får vi nu

$$\begin{aligned} m^3 + 4(m+1) + 4m^{3/2}\sqrt{m+1} &> m^3 + 4m + 4 + 4m^{3/2}\sqrt{m} \\ &= m^3 + 4m^2 + 4m + 4 \\ &> m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \end{aligned}$$

och därmed har vi visat olikheten. Enligt basfall, induktionssteg och induktionsprincipen gäller därmed olikheten för alla heltral större än eller lika med 2.

7. (a) I $\mathbb{Z}_6$ gäller att $[2] \odot [3] = [6] = [0]$ så att både $[2]$ och $[3]$ (liksom $[4]$) är nolldelare i $\mathbb{Z}_6$.

   (b) Att $[a] \odot [b] = [ab] = [0]$ är ekvivalent med att $n \mid ab$ Antag först att n inte är ett primtal. Då gäller att $n = kl$ där $1 < k, l < n$. Vi ser därmed att $[k]$ och $[l]$ är nolldelare, eftersom $[k] \neq [0]$, $[l] \neq [0]$ men $[k] \odot [l] = [kl] = [n] = [0]$. Om däremot n är ett primtal så har vi att $n \mid ab$ medför att antingen $n \mid a$ eller $n \mid b$. Detta betyder att $[ab] = [0]$ medför $[a] = 0$ eller $[b] = [0]$ vilket betyder att $\mathbb{Z}_n$ saknar nolldelare. Svaret är alltså alla som inte är primtal.

(c) Antag att $ab = 0$ i en kropp. Om $b \neq 0$ så finns det b^{-1} sådant att $bb^{-1} = 1$. Multiplicera likheten $ab = 0$ med b^{-1} i båda leden vilket ger

$$0 = 0 \cdot b^{-1} = (ab)b^{-1} = a(bb^{-1}) = a \cdot 1 = a.$$

Detta betyder att $ab = 0$ implicerar $b = 0$ eller $a = 0$, d v s att kroppen saknar nolldelare.

8. Det gäller att visa att $7^{10n+1} + 6^{11n-1} = 0$ i $\mathbb{Z}_{43}$. Eftersom $6 \cdot 7 = 42$ så får vi att $7 \cdot (-6) = -42 = 1$ i $\mathbb{Z}_{43}$, d v s -6 är invers till 7 i $\mathbb{Z}_{43}$. Vi förenklar nu uttrycket genom att förlänga med inversen till 7^{10n+1} som är

$$(-6)^{10n+1} = -\left(6^{10n+1}\right)$$

eftersom $10n + 1$ är udda. Likheten vi ska bevisa är då ekvivalent med

$$0 = -\left(6^{10n+1}\right)\left(7^{10n+1} + 6^{11n-1}\right) = 1 - 6^{21n}$$

i $\mathbb{Z}_{43}$, d v s

$$6^{21n} = 1.$$

Men i $\mathbb{Z}_{43}$ har vi att

$$6^3 = 36 \cdot 6 = (-7) \cdot 6 = -42 = 1,$$

så

$$6^{21n} = \left(6^3\right)^{7n} = 1^{7n} = 1$$

i $\mathbb{Z}_{43}$ vilket var precis det vi skulle visa.