MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2015-01-02.

1. (a) Se boken sidan 135.

   (b) Eftersom p och q är primtal är de enda positiva delarna till dem 1 och talet självt. Eftersom de är olika, får vi att $\mathrm{sgd}(p, q) = 1$. Därmed följer resultatet av första deluppgiften med $a = p$, $b = q$ och $c = r$.

2. Se boken sidorna 77-78.

3. (a) Se boken sidan 231.

   (b) Man kan t ex ta heltalen med (vanlig) addition och multiplikation, alternativt $\mathbb{Z}_n$ där $n > 1$ *inte* är ett primtal med addition och multiplikation modulo n.

4. (a) Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned}
1254 &= 1 \cdot 789 + 465 \\
789 &= 1 \cdot 465 + 324 \\
465 &= 1 \cdot 324 + 141 \\
324 &= 2 \cdot 141 + 42 \\
141 &= 3 \cdot 42 + 15 \\
42 &= 2 \cdot 15 + 12 \\
15 &= 1 \cdot 12 + 3 \\
12 &= 4 \cdot 3.
\end{aligned}$$

   Från detta drar vi slutsatsen att $\mathrm{SGD}(1254, 789) = 3$.

   (b) Eftersom 3 delar både 1254 och 789 så kommer 3 att dela $1254x+789y$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$. Därför kommer aldrig $1254x + 789y = 5$ om $x, y \in \mathbb{Z}$ och alltså saknas det sådana lösningar.

5. (a) Välja sex bland fjorton kan göras på

$$\binom{14}{6} = 3003$$

   olika sätt.

   (b) Välja tre med ljus choklad bland åtta kan göras på

$$\binom{8}{3} = 56$$

   olika sätt och välja tre med mörk choklad bland sex kan göras på

$$\binom{6}{3} = 20$$

   olika sätt. Totalt blir det $56 \cdot 20 = 1120$ olika sätt.

(c) Det är snabbast att räkna ut de varianter som inte är tillåtna och subtrahera detta från svaret i a-uppgiften. De som inte är tillåtna är med en med ljus choklad eller ingen med ljus choklad.

En med ljus choklad kan väljas på 8 sätt och sedan kan man välja fem med mörk choklad på

$$\binom{6}{5} = 6$$

olika sätt. Totalt $8 \cdot 6 = 48$ varianter med en med ljus choklad. Ingen med ljus choklad kan väljas på bara 1 sätt eftersom då måste man välja alla de sex med mörk choklad.

Svaret på uppgiften blir alltså $3003 - 48 - 1 = 2954$.

6. Vi gör ett induktions bevis och börjar med att kontrollera två (eftersom det är två startvärden på rekursionen) basfall:

$$3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = F(0) \text{ och } 3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1 = F(1).$$

Stämmer alltså för $n = 0$ och $n = 1$.

Induktionssteg. Antag att påståendet gäller för alla k med $0 \leq k < n$ där $n \geq 2$, dvs $F(k) = 3^k - 2^k$. Vi ska visa att i så fall gäller det också för n, d v s $F(n) = 3^n - 2^n$. Vi får med hjälp av definitionen av rekursionen samt antagandet att

$$\begin{aligned} F(n) &= 5F(n-1) - 6F(n-2) = 5(3^{n-1} - 2^{n-1}) - 6(3^{n-2} - 2^{n-2}) \\ &= (5 \cdot 3 - 6)3^{n-2} + (6 - 5 \cdot 2)2^{n-2} = 9 \cdot 3^{n-2} - 4 \cdot 2^{n-2} = 3^n - 2^n. \end{aligned}$$

Med stöd av basfallen och induktionssteget samt principen om total induktion så gäller nu att $F(n) = 3^n - 2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

7. Låt a vara ett godtyckligt naturligt tal. Då gäller att

$$a = \sum_{n=0}^{N} c_n 10^n \text{ och } s(a) = \sum_{n=0}^{N} c_n$$

för något $N \geq 0$ och siffror $0 \leq c_j \leq 9$. Differensen blir då

$$a - s(a) = \sum_{n=0}^{N} c_n 10^n - \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N} c_n (10^n - 1).$$

Eftersom $10 \equiv 1 \pmod 3$ så blir $10^n \equiv 1 \pmod 3$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Det betyder att

$$a - s(a) = \sum_{n=0}^{N} c_n (10^n - 1) \equiv \sum_{n=0}^{N} c_n \cdot 0 \equiv 0 \pmod 3.$$

Alltså är a och $s(a)$ kongruenta modulo 3 och därmed gäller speciellt att 3 delar a om och endast om 3 delar $s(a)$.

8. Vi vet att

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

för alla n. För alla $0 < k < n$ så gäller att

$$\binom{n}{k} \geq n,$$

vilket man t ex inser från rekursionen bakom Pascals triangel eller från den explicita formeln: Vi kan av symmetriskäl anta att $k \leq n/2$. Då är

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} \geq n,\end{aligned}$$

ty $n-k+1 \geq n-n/2+1 = n/2+1 > k$ så alla faktorer i täljaren är större än faktorerna i nämnaren.

Tillsammans ger detta att ekvivalensklassen som innehåller alla par vars binomialkoefficient blir 1 blir

$$[(1,1)] = \{(n,k) : n \in \mathbb{N},\ k = 0 \text{ eller } k = n\}$$

vilket är en ekvivalensklass med oändligt många element.

Detta betyder också att om vi tar den ekvivalensklass som innehåller alla par (n,k) vars binomialkoefficient blir $N > 1$ så måste ett par i denna uppfylla $n \leq N$. Det finns förstås bara ändligt många sådana par eftersom $k \leq n$ och alltså finns det bara ändligt många par i den ekvivalensklassen. Eftersom N var godtyckligt så gäller detta för alla ekvivalensklasser av par med binomialkoefficienten större än 1 och därmed är saken klar.