MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2015-01-02.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Gustav Kettil, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Låt $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

   (a) Antag att $\text{sgd}(a, b) = 1$. Visa att i så fall gäller att om $a \mid bc$ så gäller att $a \mid c$.

   (b) Utnyttja detta för att visa att om p och q är olika primtal, så gäller för godtyckligt heltal r att om $p \mid qr$ så gäller $p \mid r$. (Det är OK att utnyttja resultatet i första deluppgiften även om du inte lyckas bevisa det.)

   (3p)

2. Lår R vara en ekvivalensrelation på en mängd A. Visa att ekvivalensklasserna till R utgör en partition av A. (3p)

3. (a) Ge definitionen av att en mängd R med en addition och en multiplikation är en ring.

   (b) Ge ett exempel på en ring som *inte* är en kropp. (3p)

4. (a) Beräkna $\text{SGD}(1254, 789)$.

   (b) Bestäm alla lösningar $x, y \in \mathbb{Z}$ till $1254x + 789y = 5$. (3p)

5. I en chokladask finns det 14 praliner varav 6 är överdragna med mörk choklad och 8 med ljus choklad. Stefan har fått lov att välja ut och äta upp 6 stycken. På hur många sätt kan Stefan göra det om

   (a) han får välja helt fritt.

   (b) han måste ta tre med ljus choklad och tre med mörk.

   (c) han måste välja minst två med ljus choklad.

   Det ska vara explicita svar (d v s inga binomialkoefficienter eller fakulteter) och motiveringar för full poäng. (Vi förutsätter att Stefan motstår frestelsen att sätta i sig alla pralinerna och bara väljer sex stycken som han fått lov att ta.) (4p)

Var god vänd!

6. Vi definierar en funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursivt genom

$$\begin{cases} F(0) = 0, \\ F(1) = 1, \\ F(n) = 5F(n-1) - 6F(n-2), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Visa att $F(n) = 3^n - 2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (3p)

7. Bevisa att ett naturligt tal a är delbart med 3 om och endast om dess siffersumma $s(a)$ är delbar med 3.

(Om t ex $a = 3685$, så är $s(a) = 3 + 6 + 8 + 5 = 22$.) (3p)

8. I denna uppgiften bestämmer vi (oavsett vad vår personliga uppfattning är) att $0 \in \mathbb{N}$. Vi definierar en ekvivalensrelation R på

$$A = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k \leq n\}$$

genom

$$(n, k)R(m, r) \iff \binom{n}{k} = \binom{m}{r}.$$

Visa att det finns *exakt* en ekvivalensklass som innehåller oändligt många element och ange vilka element som ingår i denna oändliga ekvivalensklass. (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 26 januari. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 11.00-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.