GÖTEBORGS UNIVERSITET
MATEMATIK 1, MAM100, HT2014
INLEDANDE ALGEBRA

Övningshäfte 2: Induktion och rekursion

Övning D

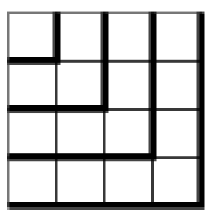
Syftet är att öva förmågan att utgående från enkla samband, aritmetiska och geometriska, se mönster som kan generaliseras till allmänna påståenden. Detta kan göras utan att titta i boken!

1. (a) Kan du fortsätta följden $1, 3, 5, 7, \ldots$? Vilket är det 7:e talet? Vilket är tal nummer 1238? Vilket är tal nummer n? Kan du ge en formel för tal nummer n?

   (b) Det är lätt att se att

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2 \end{aligned}$$

   Kan du skriva upp ett allmänt påstående med n stycken termer i vänsterledet? Vad står det i så fall i högerledet?
   Kan du tolka identiteterna geometriskt? Till din hjälp har du följande figur:

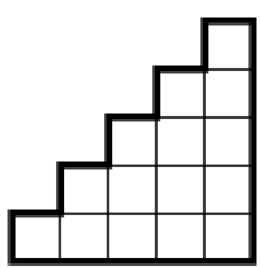


   Kan du bevisa påståendet?

2. (a) Betrakta summan av de fem första positiva heltalen

$$1+2+3+4+5.$$

   Kan du ge en enkel formel (som innehåller en produkt) för denna summa genom att betrakta figuren



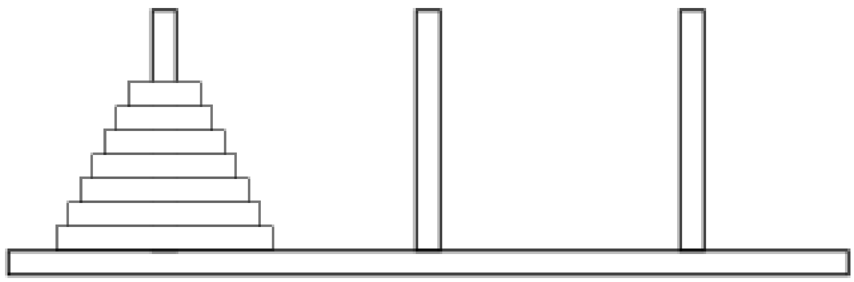
Ledning: Vad händer om du tar två sådana figurer och lägger ihop dem?

(b) Kan du ge en formel för summan av de n stycken första positiva heltalen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n =?.$$

Kan du bevisa formeln?

3. Denna uppgift handlar om de berömda “Tornen i Hanoi”.



På en platta med tre pinnar sitter n stycken skivor av minskande storlek. I bilden ovan är $n = 7$. Problemet består av att flytta alla skivorna till en annan pinne enligt följande två regler:

- Man får bara flytta en skiva åt gången.
- Man får aldrig sätta en större skiva ovanpå en mindre.

(a) Lös problemet för $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ och 7 eller tills du ser ett mönster som ger dig en princip att lösa problemet. (Ta olika stora eller numrerade papperslappar.) Anteckna hur många drag du behövde i vart och ett av fallen.

(b) Vilket är det minsta antal drag som behövs för $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ och 7?

(c) Kan du bevisa att det **går att lösa problemet** för vilket n som helst?

(d) Vilket är det minsta antalet drag som behövs för n skivor? Kan du bevisa ditt påstående?

4. I en lärobok för årskurs 5 i grundskolan kan man hitta följande problem:

Det var 12 sjörövare som hade en fest där alla i början av festen hälsade på varandra. Hur många handskakningar blev det?

(a) Lös uppgiften **själv** först och fundera över hur du tänkte. Diskutera sedan med de andra i gruppen. Tänkte ni på samma sätt? Kom ni fram till samma svar?

(b) Finns det olika sätt att tänka på? Kan ni tänka ut ett sätt som använder enbart **addition** och ett sätt som använder enbart **multiplikation**?

Dessa två sätt måste ju ge samma svar. Vilken av formlerna som ni redan sett har med detta att göra?

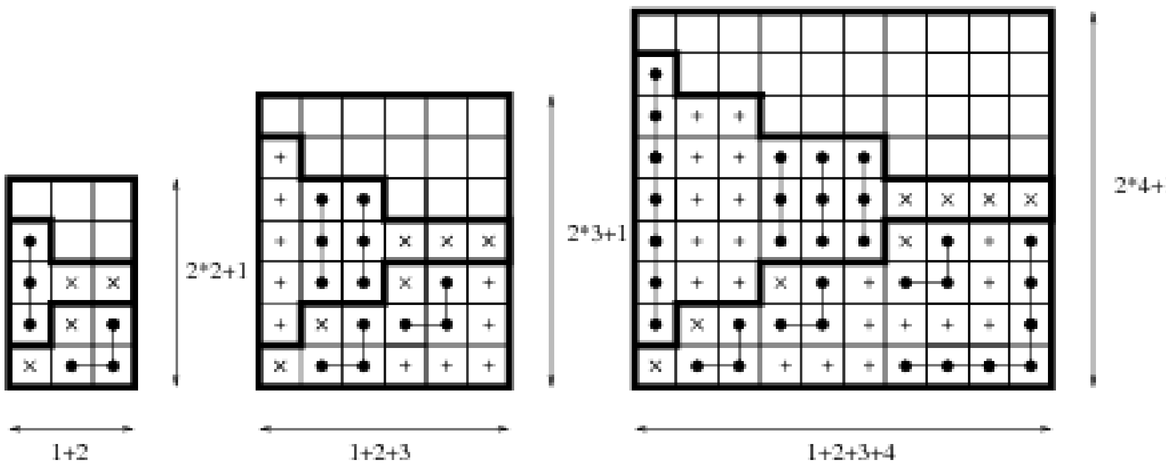
(c) Lös uppgiften med 125 studenter på fest.

(d) Generalisera uppgiften till ett godtyckligt antal sjörövare eller studenter. Vilken av de formler som vi visat redan kan du bevisa genom att lösa detta allmänna fall med addition respektive multiplikation?

5. Ni har nu hittat formler för summan av de n första positiva heltalen samt för de n första udda heltalen. Betydligt svårare är det att finna en formel för summan av de n första kvadraterna

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Babylonierna lyckades för 3–4 tusen år sedan hitta en formel genom att titta på följande figurer:



Kan du ur dessa figurer finna en formel för

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2?$$

Varför skulle formeln vara sann? Hur skulle man kunna visa det?

Övning E

Syftet är att öva sig i att genomföra korrekta matematiska resonemang som visar påståenden på formen "för alla x gäller att". Speciellt att göra detta med *matematisk induktion*.

Vi kommer att arbeta med frågan:

Hur visar man att ett predikat $P(n)$ är sant för alla positiva heltal n?

eller mer generellt

Hur visar man att ett predikat $P(n)$ är sant för alla $n \in M$ där M är något universum?

Generell metod: Det finns en generell logisk regel som kan användas oberoende av vad mängden M är som är som följer:

1. Tag $x \in M$ helt *godtyckligt*, d v s det enda som vi vet om x är just att det är ett element i M. (Ett sådant x brukar kallas för en *fri variabel*.)
2. Visa att $P(x)$ är sant.
3. Det är nu tillåtet att dra slutsatsen $\forall x \in M : P(x)$. Denna logiska regel kallas för *universell generalisering*.

Nackdelen med denna generella metod är att den ofta är svår att tillämpa i ett specifikt fall. En stark metod som fungerar för de positiva heltalen (och även för mer generella mängder med "liknande struktur") och som bygger på det femte av Peanos axiom (induktionsaxiomet) är följande:

Matematisk induktion: Om man vill visa att $P(n)$ är sant för alla positiva heltal n så gör man så här:

1. Visa att $P(1)$ är sant.
2. Visa att **om** $P(k)$ är sant för något godtyckligt $k \geq 1$, **så** är också $P(k+1)$ sant.
3. Det är nu tillåtet att dra slutsatsen att $P(n)$ är sant för alla positiva heltal.

Observera att man här aldrig behöver visa att $P(n)$ är sant för helt godtyckligt n utan att man i det andra steget (som kallas *induktionssteget*) "bara" visar att om det gäller för ett tal så gäller det också för nästa. (Se avsnitt A.5 i boken för ett bevis av att denna bevisprincip följer omedelbart av induktionsaxiomet.)

1. Tänk igenom och diskutera dessa metoder. Varför är de riktiga? Känns de rimliga? Vad är skillnaden mellan dem?
2. (a) Formulera era resultat från de första fem övningarna på formen $\forall n \in \mathbb{Z}_+ : P(n)$ och ange noggrant vad $P(n)$ är.
   (b) Försök visa era påståenden med den generella metoden. Vilka klarar ni?
   (c) Bevisa alla era påståenden med induktion. Skriv ned bevisen i detalj. Ni har kanske redan använt induktion, öppet eller dolt, i era tidigare resonemang. Diskutera.
3. (a) Hur visar man att ett predikat $P(x)$ **inte** är sant för alla x, d v s hur visar man att $\forall x : P(x)$ är falsk?
   (b) Hitta på ett exempel med ett predikat $P(x)$ och en mängd M sådana att $\forall x \in M : P(x)$ är falsk. **Bevisa** att den är falsk.
4. För vilka naturliga tal n gäller följande olikheter
   (a) $2^n > n^3$
   (b) $n! < n^n$

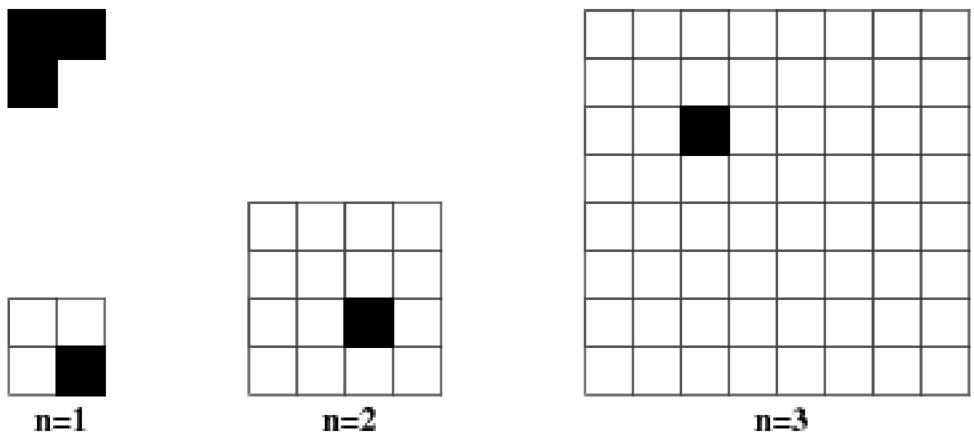
   Bevisa dina påståenden.

5. Låt $P(n)$ vara predikatet

$$2 + 4 + \ldots + 2n = \frac{1}{8} + n + n^2.$$

Visa att om $P(k)$ är sant för ett naturligt tal k, så är även $P(k+1)$ sant. Följer det nu att $P(n)$ är sant för alla n? Vad är det som denna uppgift vill påpeka?

6. Tänk er en “schackbräda” med $2^n \times 2^n$ rutor där n är ett positivt heltal. Antag att man svartmarkerat en av rutorna:



Visa att man för alla positiva heltal n kan täcka de vita rutorna på en sådan bräda fullständigt med L-formade bitar av tre rutor (se övre vänstra hörnet i figuren) oavsett vilken ruta som är svartmarkerad. Observera att det inte räcker att visa att antalet vita rutor är delbart med tre, t ex kan man inte täcka med raka bitar av längd 3.

Övning F

Syftet är att introducera och studera *rekursiva* talföljder samt undersöka sambandet mellan rekursion och induktion. Dessutom ska vi introducera summasymbolen och se att även summor naturligt kan betraktas som någonting rekursivt.

1. Betrakta talföljden $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$. Kan du fortsätta och skriva några ytterligare tal i följden? Hur är den uppbyggd? Låt a_n beteckna tal nummer n i följden, d v s $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ o s v. Ange sambandet mellan a_{n+1} och a_n för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. En välkänd rekursiv talföljd är Fibonacci-talen som vi betecknar med $F_1, F_2, F_3, \ldots$. De första talen i denna följd är

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots.$$

Här definieras varje nytt tal utifrån de **två** närmast föregående.

(a) Försök att hitta en formel för F_{n+2} uttryckt i F_{n+1} och F_n. För vilka n gäller denna?

(b) Behövs det något mer än formeln du hittade i förra uppgiften för att talföljden ska vara väldefinierad? Vad?

(c) Det finns en explicit formel för F_n, d v s en formel där man direkt kan få ut F_n för ett givet n utan någon rekursion. Den ser ut som följer:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Kontrollera att den stämmer för $n = 1, 2, 3$. Hur skulle man kunna bevisa att den gäller för alla n? Du slipper att utföra kalkylen om du inte vill men försök skriva ned en princip för beviset.

3. Diskutera relationen mellan rekursion och induktion. Har man någon nytta av att "tänka rekursivt" när man ska försöka sig på att göra ett induktionsbevis?

4. Vi ska nu bekanta oss med *summasymbolen* som definieras i avsnitt 3.5 i boken.

   Skriv minst tre av de summor som ni stött på hittills med hjälp av summasymbolen. Diskutera värdet av summasymbolen.

5. Det går att definiera summasymbolen rekursivt och denna definition är alldeles utmärkt för att genomskåda strukturen i ett bevis av att en summa är lika med någon explicit formel.

(a) Försök göra en rekursiv definition av summasymbolen

$$s(n) = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

efter följande mönster

$$s(n) = \begin{cases} \text{något explicit,} & \text{om } m > n \\ \text{något explicit,} & \text{om } m = n \\ \text{något som beror på } s(n-1), & \text{om } m < n. \end{cases}$$

Om du kört fast så fundera över vad som händer när man ökar n med ett, d v s vad är relationen mellan $s(n)$ och $s(n-1)$.

(b) Försök ge allmän princip för att bevisa ett påstående att en likhet på formen

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = f(n)$$

gäller för alla positiva heltal $n \geq m$.

(c) I den rekursiva definitionen kan man i själva verket baka in det andra fallet i det tredje. Kolla detta.

6. Undersök vilka av följande summor som är aritmetiska respektive geometriska summor (se avsnitt 4.3 i boken) och beräkna dessa exakt.

(a) $\sum_{i=0}^{100}(2+3i)$

(b) $\sum_{i=0}^{100}(2+3i^2)$
(c) $\sum_{i=0}^{100} 2\cdot 3^i$
(d) $\sum_{i=0}^{100}(2^i+3i)$

Kan du beräkna de som varken är aritmetiska eller geometriska explicit utan att addera talen ett och ett (eller använda räknaren)?

Övning G

Vi avslutar med några ytterligare induktionsuppgifter att öva på om det finns tid över.

1. Försök finna ett fel i följande "induktionsbevis":

   Vi påstår att alla människor har samma ögonfärg. Man kan formulera om detta som att för alla positiva heltal n gäller att om man tar en grupp med n människor så har alla i gruppen samma ögonfärg. Påståendet är självklart sant när $n = 1$ så vi har ett basfall fixat. Antag nu att påståendet är sant för varje grupp med k människor. Vi ska visa att i så fall är det också sant för varje grupp med $k+1$ människor. Betrakta en sådan mängd. Om vi tar bort en person A så har vi en grupp med k människor som enligt antagandet alla har samma ögonfärg. Tag nu bort en annan person B. Då får vi också en grupp med k människor som nu innehåller A och som alla har samma ögonfärg. Alla i snittet (som består av alla utom A och B) av de två grupperna har samma ögonfärg (uppenbarligen) och dessutom har A och B samma ögonfärg som dessa eftersom i var och en av de två delgrupperna hade alla samma ögonfärg. Alltså har alla $k+1$ personerna samma ögonfärg och beviset är klart.

2. Visa att om man drar n räta linjer i planet så att inga är parallella och inga tre möts i en punkt, så delar dessa linjer upp planet i

   $$\frac{n^2+n}{2}+1$$

   områden. (För vilka n gäller detta?)

3. Ni har tidigare visat att

   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Försök hitta en formel för $\sum_{k=1}^{n} k^3$ genom att undersöka några värden på n. Bevisa din formel.

4. Man kan bevisa en formel för summan

   $$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

   i förra uppgiften genom att betrakta

   $$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4$$

och utnyttja att man känner till summor av lägre potenser. Försök göra detta. Kan du generalisera detta?

Uppgifter ur boken som rekommenderas för självstudier:

Kapitel 4: 2, 3, 12, 20, 21, 22, 23.