MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2014-12-22 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Sven Järner.
tel. 0730 211005

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften. Om inget annat sägs är A en $m \times n$ - matris.

   (a) Linjen $(x, y, z) = (1 + t, -2 + t, 2t)$ är parallell med linjen $x + 3 = (2y - 1)/2 = (z - 3)/2$

   (b) Om $\boldsymbol{x_1}$ och $\boldsymbol{x_2}$ båda är lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ så är även $2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}$ en lösning.

   (c) Om A är kvadratisk med $\det A = 0$ så har A ett egenvärde som är noll.

   (d) Om A är kvadraatisk med $\det A = 0$ så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösning för varje $\boldsymbol{b}$.

   (e) Om Col(A) och Nul(A) har dimension 3 respektive 2 så är Col(A) en delmängd av R^5.

   (f) Om Col(A) och Nul(A) har dimension 3 respektive 2 så är Nul(A) en delmängd av R^5.

   (g) Om A och B är kvadratiska och AB är inverterbar så är både A och B inverterbara.

   (h) Om Om $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_4}$ är linjärt beroende vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ men $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_3}$ är linjärt oberoende så är $\boldsymbol{x_4}$ en linjärkombination av de övriga.

2. Formulera och bevisa Pythagoras sats i R^n.

3. Visa att om $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_p$ är vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ där $p > n$ så är de linjärt beroende.

4. Fyra punkter i rummet är givna med koordinater i ett ON-system:
$$P_1 : (1, 0, 1),\ P_2 : (-1, 1, 1),\ P_3 : (2, 2, 0),\ P_4 : (0, 2, 0).$$

   (a) Beräkna arean av triangeln med hörn i P_1, P_2, och P_3.

   (b) Beräkna volymen av tetraedern med hörn i P_1, P_2, P_3 och P_4.

5. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = at + b$ till följande mätdata.

t_i	-1	0	1	2	3
y_i	0	1	1	2	2

6. F är en linjär avbildning från $\boldsymbol{R}^4$ till $\boldsymbol{R}^3$ som ges av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.
Bestäm, för alla värden på a, dimensionen av, samt en bas för värderummet till F.

7. Lös differentialekvationssystemet $\begin{cases} x'(t) &= 5x(t) - 3y(t) \\ y'(t) &= 6x(t) - 4y(t) \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

8. Låt W vara på det underrum av R^5 som spänns upp av vektorerna
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Skriv vektorn
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ som en summa av en vektor i W 0ch en vektor i $W^{\perp}$.

Lycka till!
Sven