MATEMATIK
Göteborgs universitet

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL DUGGA 2

Envariabelanalys, hösten 2014

---

1 (a) FALSKT. Det gäller bara för de funktioner som är kontinuerliga i x_0.

(b) SANT. Enligt sats i boken.

(c) SANT. $f \circ g(x) = f(g(x)) = (e^x)^2 = e^{2x}$.

(d) FALSKT. Betrakta t.ex. följden $1, 2, 3, \ldots$.

2

$$D \sin(xe^x) = \cos(xe^x) \cdot D(xe^x) = \cos(xe^x) \cdot (e^x + xe^x) = e^x(x+1)\cos(xe^x).$$

3 (a) Faktorisera först täljaren: $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$. Vi får:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)}{x-4} = \lim_{x\to 4} x + 3 = 7.$$

(b) Återför på standardgränsvärdet $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$ genom variabelsubstitutionen $t = a/x$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{a/t} = \lim_{t\to 0} \left((1+t)^t\right)^a = e^a.$$

4 Vi undersöker först

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1 + x^3 e^{-x}}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 1/x^2 + xe^{-x}}{1 + 1/x} = \frac{2+0+0}{1+0} = 2.$$

Så eventuellt finns sned asymptot då $x \to \infty$. Vi fortsätter:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1 + x^3 e^{-x}}{x+1} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1 + x^3 e^{-x} - 2x(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x + 1 + x^3 e^{-x}}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2 + 1/x + x^2 e^{-x}}{1 + 1/x} = -2, \end{aligned}$$

vilket visar att $y = 2x - 2$ är en sned asymptot då $x \to \infty$.

5 Sätt $f(x) = 1/(x+1)^2$. Då är $f'(x) = -2/(x+1)^3$ så ekvationen för tangenten i punkten med x-koordinat a är

$$y - \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{-2}{(a+1)^3}(x-a). \qquad (*)$$

Om vi sätter $x = 0$ i $(*)$ och löser ut y får vi $(3a+1)/(a+1)^3$; detta är alltså triangelns höjd. Om vi sätter $y = 0$ i $(*)$ och löser ut x får vi $(3a+1)/2$; detta är då triangelns bas. Triangelns area, som funktion av a, blir alltså

$$A(a) = \frac{(3a+1)^2}{4(a+1)^3}$$

och vi vill bestämma dess största värde på intervallet $[-1/3, \infty)$. Vi har (efter beräkning) att

$$A'(a) = \frac{3(3a+1)(1-a)}{(a+1)^4}.$$

Så de stationära punkterna är då $a = -1/3$ och $a = 1$ och teckentabell för A' visar att A är växande på intervallet $[-1/3, 1]$ och avtagande på intervallet $[1, \infty)$. Största värdet på arean är alltså $A(1) = 1/2$.