1. Extra 1, Lösningsförslag

4. Vet att $f(x)$ är kontinuerlig överallt, och deriverbar i alla punkter utom eventuellt i 0. Notera nu att

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \cdots = \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

MVS ger att $\sin x = \sin x - \sin 0 = x\cos(\theta x)$ (obs här at $\theta = \theta(x)$) så vi får

$$\frac{x\cos(\theta x) - x}{x^2} = x\frac{\cos(\theta x) - 1}{(\theta x)^2}\Big(\frac{\theta x}{x}\Big)^2.$$

Första faktorn går mot noll, andra mot $-1/2$ och sista är begränsad eftersom $\theta = \theta(x)$ ligger mellan 0 och 1.

6 Ska visa att

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

har ett gränsvärde då $x \to 0$. Om $x > 0$ så är MVS tillämpbar på $[0, x]$ så $f(x) - f(0) = xf'(\theta x)$. Differenskvoten är alltså $f'(\theta x)$ vilket går mot noll efterson $\theta(x)x \to 0$ då $x \to 0$. Pss ser man att diff-kvoten har gränsvärdet 0 då $x \to 0$ från vänster.

7 Räcker visa att $\phi'(x) \geq 0$. Obs att

$$\phi'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

så räcker visa att $xf'(x) - f(x) \geq 0$. Obs att MVS tillämpbar för $f(x)$ på $[0, x]$ så $f(x) = xf'(\theta x)$. Alltså är

$$xf'(x) - f(x) = x(f'(x) - f'(\theta x))$$

men detta är ≥ 0 eftersom f' antogs vara växande. (Antagandet att f är växande behövs inte!!)

8 Del (i) är en följer ganska lätt från MVS.

För att se del (ii), tag $\epsilon > 0$. Det finns då ω så att $|f'(x) - L| < \epsilon$ om $x \geq \omega$. Nu är

$$\frac{f(\omega + y)}{y + \omega} = \frac{f(\omega + y) - f(\omega)}{y + \omega} =$$

$$\frac{yf'(\omega+\theta y)}{y+\omega}+\frac{f(\omega)}{y+\omega}=f'(\omega+\theta y)+f'(\omega+\theta y)\frac{-\omega+f(\omega)}{y+\omega}$$

Med triangelolikheten följer nu att

$$(*)\qquad \Big|\frac{f(\omega+y)}{y+\omega}-L\Big|\le|f'(\omega+\theta y)-L|+\Big|f'(\omega+\theta y)\frac{\omega+f(\omega)}{y+\omega}\Big|.$$

Vi vet att $f'(x)$ är begränsad på$[\omega,\infty[$ eftersom den har ett gränsvärde då $x\to\infty$. Det följer nu att (*) är mindre än 2ϵ om y stort nog.

9 Ledning: Visa först att om h' har högst ℓ nollställen så har h högst $\ell+1$ nollställen.