MATEMATIK
Göteborgs universitet

DATALAB 1

Envariabelanalys, hösten 2014

Redovisa dina svar (och i förekommande fall även lösningar) på uppgifterna på markerad plats. Utskrifter av plottar skall bifogas. I övrigt skall inget annat lämnas in!
Sista inlämningsdag: 31 oktober

Syftet med denna lab är att med MATLABs hjälp numeriskt försöka lösa ekvationen

$$x^2 - \frac{\pi^2 - 4}{4\pi}x + \frac{3}{4} - \tan(x) = 0 \tag{1}$$

i intervallet $[0, \pi/2)$.

Försök 1
Vårt första försök baserar sig på iterationsmetoden som är beskriven först i avsnitt 4.5. Vi börjar med att skriva om (1) som

$$x = \frac{4\pi}{\pi^2 - 4}(x^2 + \frac{3}{4} - \tan(x))$$

och vi betecknar funktionen definierad av uttrycket på höger sida med $F(x)$.

Uppgift 1: Implementera funktionen $F(x)$ i MATLAB genom att skapa en .m-fil med namnet "strangefunct" och innehållet

```
function y=strangefunct(x)
c=4*pi/(pi^2-4);
y=c*(x.^2+3/4-tan(x));
```

Uppgift 2: Använd MATLAB för att rita kurvorna $y = x$ och $y = F(x)$ i samma figur. Läs grafiskt av ett första närmevärde x_1 på lösningen till $x = F(x)$.

```
>> x=linspace(0, 1.4);
>> f=x;
>> g=strangefunct(x);
>> plot(x, f, 'blue', x, g, 'green')
```

Närmevärde: $x_1 =$

Vi bildar en talföljd $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ genom att rekursivt definiera

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Uppgift 3: Bevisa (teoretiskt) att om $\lim_{k\to\infty} x_k = r$ och $r \in [0, \pi/2)$ så är r en lösning till (1), dvs. r uppfyller $r = F(r)$.

Bevis:

Uppgift 4: Beräkna $x_1, x_2, \ldots, x_{60}$. (Redovisa endast $x_{51}, \ldots, x_{60}$.) Tror du att följden konvergerar? (Ditt svar beror på hur väl du valt x_1.) Om följden verkar konvergera, ge ett närmevärde på gränsvärdet.

```
>> x1=...                          %Ditt grafiskt avlästa närmevärde
>> x2=strangefunct(x1)
>> x3=strangefunct(x2)
>> x4=strangefunct(x3)
 ...
 ...
```

eller smidigare:

```
>> x=zeros(60,1);                  %Kolonnvektor med 60 st nollor
>> x(1)=...;                       %Ditt grafiskt avlästa närmevärde
>> for i=1:60                      %Bygg rekursivt upp din talföljd
x(i+1)=strangefunct(x(i));
end
>> format long                     %Visa många decimaler
>> x
```

$x_{51} =$

$x_{52} =$

$x_{53} =$

$x_{54} =$

$x_{55} =$

$x_{56} =$

$x_{57} =$

$x_{58} =$

$x_{59} =$

$x_{60} =$

Verkar följden konvergera? Ja/nej
Om ja, mot vad:

Uppgift 5: Rita derivatan av $F(x)$ på intervallet $[0, 1]$ och ge en *kort* motivering till varför talföljden $\{x_k\}$ uppför sig som den gör? *Tips*: Se sats 4.5.3 i boken.

```
>> x=linspace(0, 1);
>> c=4*pi/(pi^2-4);
>> Fprim=c*(2*x - 1./(cos(x)).^2);     %Derivatan av F
>> plot(x, Fprim)
```

Motivering:

Försök 2 (Intervallhalveringsmetoden)
Om denna metod kan du läsa i avsnitt 2.5.2 i boken. Betrakta ekvation (1) och beteckna funktionen definierad av vänsterledet med $f(x)$; vi söker alltså lösningar till $f(x) = 0$. Vi börjar med att implementera f genom att skapa en .m-fil med namnet ”nyfunk” och innehållet:

```
function y=nyfunk(x)
cinv=(pi^2-4)/(4*pi);
y=x.^2 - cinv*x + 3/4 - tan(x);
```

Uppgift 6: Beräkna $f(0.5)$ och $f(1.5)$ och motivera att det finns en lösning till $f(x) = 0$ i intervallet $[0.5, 1.5]$. Uppskatta också ett närmevärde på lösningen med ett fel som inte överstiger halva intervallängden ($= 1/2$).

```
>> nyfunk(0.5)
>> nyfunk(1.5)
```

Svar: $f(0.5) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f(1.5) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
Motivering:

Närmevärde med fel $\leq 1/2$:

Uppgift 7: Beräkna $f(1)$ och avgör vilket/vilka av intervallen $[0.5, 1]$ och $[1, 1.5]$ som innehåller lösning till (1). Uppskatta också ett nytt närmevärde på lösningen med ett fel som inte överstiger $1/4$.

Svar: $f(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Lösning till (1) **finns i intervallet:**
Närmevärde med fel $\leq 1/4$**:**

Denna procedur kan förstås upprepas och varje gång stänger vi in lösningen i ett intervall som är hälften så långt som det tidigare intervallet. Upprepar vi tillräckligt många gånger får vi alltså ett närmevärde på lösningen med så många korrekta decimaler vi vill.

Uppgift 8: Skapa en .m-fil med följande innehåll och använd den för att lösa ekvation (1) med fem korrekta decimaler.

```
function r=intervallhalv(tol)              %tol är toleransen du bestämmer
 intervallstart  = 0.5;
 intervallslut  = 1.5;
intervallangd = intervallslut - intervallstart ;
while intervallangd/2 > tol
    if nyfunk( intervallstart )*nyfunk( intervallstart + intervallangd/2) <= 0
        intervallslut = intervallstart + intervallangd/2;
    else
        intervallstart = intervallstart + intervallangd/2;
    end
    intervallangd = intervallangd/2;
end
r= intervallstart + ( intervallslut - intervallstart )/2;
```

Lösning med 5 **korrekta decimaler:**

Uppgift 9: Multiplicera din lösning med 4. Känns talet igen? Vad tror du är den exakta lösningen till ekvation (1)? Verifiera teoretiskt med direkt insättning i (1)! Jämför med svaret du fick på uppgift 4.

Förmodad exakt lösning:
Verifiering:

Försök 3 (Newton-Raphsons metod)
Vi har ju redan lyckats lösa ekvation (1) men vi illustrerar även hur Newton-Raphsons metod funkar; du kan läsa om den i avsnitt 4.5 i boken.

Vi vill alltså lösa ekvationen $f(x) = 0$ där f är funktionen definierad av vänsterledet i (1); i MATLAB har vi tillgång till f via .m-filen ”nyfunk”. Låt x_1 vara din första approximation av lösningen från Försök 1. Enligt Taylors sats är

$$f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

om x är nära x_1. Istället för att lösa $f(x) = 0$ löser vi $f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1) = 0$. Detta är enkelt och vi får lösningen

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Förhoppningsvis är x_2 en bättre approximation av lösningen än x_1.

Uppgift 10: Beräkna derivatan, f', av f och implementera den genom att skapa en .m-fil med namnet ”nyfunkprim”. Beräkna x_2.

```
function y=nyfunkprim(x)
cinv=(pi^2-4)/(4*pi);
y=...;                      %Fyll i ditt uttryck för f'
```

Vi definierar en talföjd $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ rekursivt genom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Svar: $f'(x) =$

$x_2 =$

Uppgift 11: Bevisa att om $\lim_{k\to\infty} x_k = r$ så är r en lösning till $f(x) = 0$.

Bevis:

Uppgift 12: Beräkna $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$, t.ex. med någon av procedurerna beskrivna i Försök 1. Verkar talföljden konvergera? Hur många iterationer behöver du göra för att lösa ekvation (1) med fem decimalers noggrannhet? Jämför med ditt svar på uppgift 4!

Konvergerar följden? Ja/nej
Antal iterationer för att lösa (1) med 5 decimalers noggrannhet: