Matematik
Göteborgs universitet
H.C. & H.S.K.

Lösningsförslag
Envariabelanalys, MMG200, april 2015

1. (a) Se kurslitteraturen.

   (b) Låt $f(x) = x^2$. Då är f kontinuerlig, $f(1) = 1$ och $f(2) = 4$. Så satsen om mellanliggande värde ger att det finns ett tal a med $1 \le a \le 2$ som uppfyller $a^2 = 2$.

2. Se kurslitteraturen.

3. Vi har att $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ så lösningarna till $f'(x) = 0$ blir $x = 1$ och $x = 3$. Största och minsta värde på $[0, 5]$ finns bland $f(0) = 3$, $f(1) = 7$, $f(3) = 3$ och $f(5) = 23$. Största värde är alltså 23 och minsta värde är 3.

4. Vi har

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt \\ 0 \mapsto 0, \infty \mapsto \infty \end{bmatrix} = 2\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt =$$

$$= [PI] = 2\left([-t^2e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty 2te^{-t}\,dt\right) = 4\int_0^\infty te^{-t}\,dt = [PI] =$$

$$4\left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt\right) = 4\int_0^\infty e^{-t}\,dt = 4[-e^{-t}]_0^\infty = 4\ .$$

5. Vi följer receptet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + \ln x}{x^2 + x\arctan x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \ln x/x^2}{1 + \arctan x/x} = 2$$

så eventuellt finns sned asymptot då $x \to \infty$; den har i så fall lutning 2. Vi räknar nu

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + \ln x - (2x^2 + 2x\arctan x)}{x + \arctan x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/x - 2\arctan x}{1 + \arctan x/x} = -\pi. \end{aligned}$$

Alltså är $y = 2x - \pi$ en sned asymptot då $x \to \infty$.

6. Vi löser först den homogena ekvationen. Eftersom den karakteristiska ekvationen är $r^2+r-2=0$ har rötterna 1 och -2 är homogenlösningen

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-2x} \; .$$

För att bestämma en partikulärlösning observerarar vi att e^x så vi har resonans. Därför ansätter vi $y = Cxe^x$. Då är $y' = Ce^x(x+1)$ och $y'' = Ce^x(x+2)$. Så ekvationen ger

$$y'' + y' - 2y = Ce^x(x+2+x+1-2x) = 3Ce^x = 3e^x \; .$$

Så $C = 1$ och $y_p = xe^x$.

Den allmänna lösningen är

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A+x)e^x + Be^{-2x} \; .$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $A + B = 1$. Dessutom är

$$y'(x) = (1+A+x)e^x - 2Be^{-2x} \; ,$$

så $y'(0) = 0$ ger $1 + A - 2B = 0$. Detta, och $A + B = 1$, ger att $A = B = 1$.

Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = (1+x)e^x + e^{-2x} \; .$$

7. Vi skall bestämma a och b så att gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \qquad (*)$$

existerar. Vi gör det genom att beräkna motsvarande höger- och vänstergränsvärde och kräva att de blir lika. Observera att $f(0) = 1$. Vi har

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h+1-1}{h} = 1,$$

och

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+ah+b-1}{h}.$$

För att detta sista gränsvärde skall existera måste $b = 1$ och gränsvärdet blir då a. Gränsvärdet $(*)$ existerar alltså om $b = 1$ och $a = 1$.

8. Vi börjar med att Taylorutveckla integranden. Vi har

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5), x \to 0,$$

vilket ger

$$t^2 - \sin t^2 = t^2 - \left(t^2 - \frac{1}{6}t^6 + O(t^{10})\right) = \frac{1}{6}t^6 + O(t^{10})\ .$$

Så

$$F(x) = \int_0^x t^2 - \sin t^2\, dt = \int_0^x \frac{1}{6}t^6 + O(t^{10})dt = \frac{1}{42}x^7 + O(x^{11}), x \to 0\ .$$

Så för att gränsvärdet skall existera och vara nollskilt skall $a = 7$. För detta a gäller

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^7} \int_0^x t^2 - \sin t^2\, dt = \lim_{x \to 0} \frac{1}{42} + O(x^4) = \frac{1}{42}\ .$$