Inga hjälpmedel

Telefonvakt:

Åsa Fahlander

0703-08 83 04

Matematik

Göteborgs universitet

H.C. & H.S.K.

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Fredag den 16 januari 2015, $8^{30} - 12^{30}$

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 1 som kan ge fyra poäng.

1. Visa att om f är en deriverbar funktion på intervallet (a, b) och $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$ så är f en konstant funktion. (3p)

   Visa att funktionen $f(x) = \arctan(x^2) + \arctan(x^{-2})$, definierad för $x > 0$, endast antar ett värde. (1p)

2. (a) Formulera *integralkalkylens* medelvärdessats.

   (b) Bevisa den.

   (c) Visa att $0 \leq \displaystyle\int_0^2 e^{-\frac{1}{x}} dx \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3. Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{10\ln(2x)}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x - 1}.$$

4. Beräkna

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, e^{\sqrt{\cos x}} dx \,.$$

5. Definiera $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som $f(x) = \arctan(x) - \ln(x^2 + c)$ där c är en positiv konstant.

   a) Bestäm c så att f får en stationär punkt då $x = 1$. (2p)

   b) Avgör om den stationära punkten är ett lokalt max, ett lokalt min eller en terrasspunkt. (1p)

Var god vänd.

6. Bestäm, för $x > 1$, en funktion $y(x)$ som uppfyller differentialekvationen $y'(x) + \dfrac{1}{x \ln x} y(x) = 1$ och sådan att $\lim_{x\to 1} y(x)$ existerar.

7. Två bilar A och B kör moturs på en cirkulär bana med radie R km. Vid ett visst ögonblick är bil B ett kvarts varv före bil A. I detta ögonblick står det 150 km/h på bil B:s hastighetsmätare och på bil A:s står det 125 km/h. Hur fort ändras avståndet mellan bil A och bil B i detta ögonblick?

   OBS att vi här med avståndet menar *kortaste avståndet*, alltså *inte* avståndet längs banan.

8. Antag att $f(x)$ är en oändligt deriverbar funktion på $\mathbb{R}$. Antag dessutom att $f(0) = 1$ och $f'(0) = \pi$. Bestäm $\lim_{x\to 0} f(x)^{1/x}$.