Lösningar, Envariabelanalys, MMG200

Fredag den 16 januari 2015

1. Se kurslitteraturen.

   Derivatan av f är

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^{-4}} \cdot \frac{-2}{x^3} = 2x\left(\frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+x^4}\right) = 0.$$

2. (a) & (b) Se kurslitteraturen.

   (c) Om vi tolkar $e^{-\frac{1}{0}}$ som $\lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$ blir integranden kontinuerlig. Enligt (a) får vi $\int_0^2 e^{-\frac{1}{x}}dx = 2e^{-\frac{1}{\xi}}$ där $0 \leq \xi \leq 2$. Funktionen $e^{-\frac{1}{x}}$ är växande på $[0,2]$ så $0 \leq e^{-\frac{1}{\xi}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$ och påståendet följer.

3.

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{10\ln(2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{10\ln 2 + 10\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{10 + 10\ln 2/\ln x} = \frac{2}{10+0} = 1/5.$$

   För uppgift b) gör vi först polynomdivision och får

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2 + 4 = 5.$$

4. Vi har

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, e^{\sqrt{\cos x}} dx = \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt{\cos x}, \cos x = t^2, & 0 \mapsto 1, \\ -\sin x dx = 2tdt, & \pi/2 \mapsto 0 \end{array}\right] =$$

$$-\int_1^0 2te^t dt = \int_0^1 2te^t dt = [\text{part.int.}] =$$

$$2\left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right) = 2(e - [e^t]_0^1) = 2(e - e + 1) = 2\ .$$

5. Vi börjar med att beräkna derivatan av f:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{x^2+c} = \cdots = \frac{-2x^3+x^2-2x+c}{(1+x^2)(c+x^2)}.$$

a) Kravet att f skall ha en stationär punkt då $x = 1$ betyder att $f'(1) = 0$, dvs.

$$\frac{-2+1-2+c}{(1+1)(c+1)} = 0 \iff c = 3.$$

b) Faktorisera först täljaren i uttrycket för f' (med $c = 3$) m.h.a. polynomdivision. Notera att vi från uppgift a) vet att $x-1$ är en faktor. Vi får

$$-2x^3+x^2-2x+3 = -(2x^2+x+3)(x-1)$$

och alltså är

$$f'(x) = \frac{-(2x^2+x+3)(x-1)}{(1+x^2)(3+x^2)}.$$

Faktorn $2x^2+x+3$ saknar reella nollställen (nollställena är $-1/4 \pm i\sqrt{23}/4$) så $2x^2+x+3$ har samma tecken (+) för alla x. Teckentabell för f' visar att f' är positiv till vänster om $x = 1$ och negativ till höger. Alltså har f ett lokalt max då $x = 1$.

6. Eftersom $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)$ är den integrerande faktorn $e^{\ln(\ln x)} = \ln x$. Multiplikation med denna ger $(y\ln x)' = \ln x$. Så

$$y\ln x = \int \ln x dx = (\text{part.int.}) = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C\ ,$$

och

$$y(x) = x + \frac{C-x}{\ln x}\ .$$

Eftersom $\ln x \to 0$ då $x \to 1$ måste $C = 1$ för att gränsvärdet skall existera. Så

$$y(x) = x + \frac{1-x}{\ln x}\ .$$

För att se att $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x}$ existerar skriver vi $\ln x = \ln(1+(x-1))$, sätter $t = x-1$, och får med hjälp avstandardgränsvärde att $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x} = -\lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = -1.$

7. Betrakta banan som cirkeln med centrum i origo i xy-planet och radien R och att bilarna rör sig moturs längs denna bana. Låt $\alpha(t)$ vara vinkeln mellan positiva x-axeln och linjen från origo till bil A vid tiden t (mätt i timmar); låt $\beta(t)$ vara motsvarande för bil B. Vi kan (för enkelhets skull) anta att det aktuella ögonblicket svarar mot $t = 0$ och att $\alpha(0) = 0$ och $\beta(0) = \pi/2$.

   Bil A:s hastighet vid tiden t ges av $v_A(t) = R\alpha'(t)$ km/h och bil B:s hastighet ges av $v_B(t) = R\beta'(t)$ km/h. Alltså är $\alpha'(0) = 125/R$ och $\beta'(0) = 150/R$. Låt $d(t)$ vara avståndet mellan A och B vid tiden t. Enligt cosinussatsen är

$$d^2(t) = 2R^2 - 2R^2\cos(\beta(t) - \alpha(t)),$$

   och derivering m.h.a. kedjeregeln ger

$$2d(t)d'(t) = 2R^2\sin(\beta(t) - \alpha(t)) \cdot (\beta'(t) - \alpha'(t)).$$

   Sätt $t = 0$ i denna ekvation och lös ut $d'(0)$. Eftersom $d(0) = \sqrt{2}R$ får vi

$$d'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}R}(R^2\sin(\pi/2) \cdot (150/R - 125/R)) = 25/\sqrt{2} \text{ km/h},$$

   som är svaret.

8. Vi skriver $f(x)^{1/x} = e^{\ln(f(x)^{1/x})} = e^{\ln(f(x))/x}$. För att beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\ln(f(x))/x$ Taylorutvecklar vi. Vi har

$$\ln(1+t) = t + O(t^2), t \to 0 \;.$$

   Dessutom gäller

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + O(x^2) = 1 + \pi x + O(x^2), x \to 0 \;.$$

   Så

$$\ln(f(x)) = \ln(1 + \pi x + O(x^2)) = \pi x + O(x^2), x \to 0 \;.$$

   Detta ger

$$\frac{\ln(f(x))}{x} = \frac{\pi x + O(x^2)}{x} = \pi + O(x) \to \pi, x \to 0 \;,$$

   och $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(f(x))/x} = e^{\pi}$.