Matematik
Göteborgs universitet
H.C. & H.S.K.

Lösningsförslag
Envariabelanalys, MMG200, augusti 2015

1. (a) Se kurslitteraturen.

   (b) $e^{\sin x}$ är kontinuerlig. Så integralkalkylens medelvärdessats ger

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin x} dx = \pi e^{\sin \xi} \ .$$

   Men $-1 \leq \sin \xi \leq 1$ så $1/e \leq e^{\sin \xi} \leq e$, och påståendet följer.

2. Se kurslitteraturen.

3. Vi räknar först m.h.a. kedjeregeln och produktregeln

$$y' = e^{x \sin x}(\sin x + x \cos x).$$

   Den sökta tangentens lutning blir alltså $y'(\pi/2) = e^{\pi/2}$ så tangentens ekvation blir

$$y - e^{\pi/2} = e^{\pi/2}(x - \pi/2)$$

   som omskrivet blir

$$y = e^{\pi/2}(x - \frac{\pi - 2}{2}).$$

4. Den homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ med rötterna $r = \pm 2i$. Så

$$y_h(x) = A \cos 2x + B \sin 2x \ .$$

   En partikulärlösning till $y'' + 4y = 4$ är $y_p = 1$.

   Den allmänna lösningen är alltså

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A \cos 2x + B \sin 2x + 1 \ .$$

   Villkoret $y(0) = 1$ ger $A+1 = 1$ så $A = 0$. Eftersom $y'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$, ger villkoret så $y'(0) = 1$ att $2B = 1$ och $B = \frac{1}{2}$.

   Den sökta lösningen är alltså $y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 1$.

5. (a) Återför på standardgränsvärdet $\lim_{t\to 0} \sin t/t = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x} 3\frac{\sin 3x}{3x} = \Big[t = 3x, x \to \infty \Rightarrow t \to \infty\Big] \\ &= \lim_{t\to\infty} 3\frac{\sin t}{t} 3\frac{\sin t}{t} = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 9.\end{aligned}$$

(b) Förlänger med täljarens konjugatuttryck:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(c) Använder standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty} x^k/e^x = 0$ (som gäller för alla heltal k):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x+e^x} = \frac{x^3/e^x}{x/e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

6. Vi har

$$\int_0^1 x \arctan x^2 dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2, dt = 2x dx \\ 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan t dt =$$

$$= [PI] = \frac{1}{2}\left(\Big[t \arctan t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\ .$$

7. Svar: Nej! Argument: Antag (för motsägelse) att det finns en sådan funktion och kalla den f. För varje t, sådant att $0 < t \leq 1$, uppfyller då f förutsättningarna i medelvärdessatsen på intervallet $[t, 1]$. Alltså finns en punkt ξ (som ev. beror på t) i intervallet $(t, 1)$ sådan att

$$f(1) - f(t) = f'(\xi)(1-t). \qquad (*)$$

Enligt antagande är f' begränsad på $(0, 1)$, dvs. det finns ett tal $A < \infty$ sådant att $|f'(x)| \leq A$ för alla $x \in (0, 1)$. Från $(*)$ och omvända triangelolikheten får vi att

$$|f(t)| \leq |f(1) - f(t)| + |f(1)| \leq |f'(\xi)| \cdot |1-t| + |f(1)| \leq A + |f(1)|$$

för varje $t \in (0, 1]$. Alltså är f begränsad, vilket strider mot antagandet om f.

8. Taylors formel ger att om $|x| \leq 1$ så är $\sin x = x + B_0(x)x^3$ för någon begränsad funktion $B_0(x)$. Så om $t \geq 1$ har vi

$$t \sin \frac{1}{t} = t \left(\frac{1}{t} + B(t)\frac{1}{t^3} \right) = 1 + B(t)\frac{1}{t^2}$$

där $B(t)$ är en begränsad funktion. Så

$$\frac{1}{x}\int_1^x t \sin \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{x}\int_1^x dt + \frac{1}{x}\int_1^x B(t)\frac{1}{t^2}\, dt$$

För den första integralen har vi $\displaystyle\frac{1}{x}\int_1^x dt = \frac{x-1}{x} \to 1, x \to \infty$. För den andra gäller

$$\left| \frac{1}{x}\int_1^x B(t)\frac{1}{t^2}\, dt \right| \leq \frac{C}{x}\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt \to 0, x \to \infty,$$

eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ är konvergent.

Alltså är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x t \sin \frac{1}{t}\, dt = 1\ .$$