MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2016-08-25.

1. (a) Se boken sidorna 215-218.

   (b) Man kan ta $(\mathbb{Z}_4, +)$ och $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$.

2. Se boken sidorna 178-179.

3. Se boken sidorna 122, 125 och 134.

4. (a) Uppenbarligen delar inte 2 10101, men siffersumman är 3 så 3 är en delare och vi får

$$10101 = 3 \cdot 3367.$$

   Varken 3 eller 5 delar 3367, men $3367 = 7 \cdot 481$. Test ger att varken 7 eller 11 delar 481, men $481 = 13 \cdot 37$. Därmed får vi primtalsfaktoriseringen

$$10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37.$$

   (b) Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 301 &= 3 \cdot 84 + 49 \\ 84 &= 1 \cdot 49 + 35 \\ 49 &= 1 \cdot 35 + 14 \\ 35 &= 2 \cdot 14 + 7 \\ 14 &= 2 \cdot 7. \end{aligned}$$

   Alltså är $\mathrm{SGD}(301, 84) = 7$. Vi ersätter successivt de erhållna resterna och får:

$$\begin{aligned} 7 &= 35 - 2 \cdot 14 = 35 - 2 \cdot (49 - 1 \cdot 35) = 3 \cdot 35 - 2 \cdot 49 \\ &= 3 \cdot (84 - 1 \cdot 49) - 2 \cdot 49 = 3 \cdot 84 - 5 \cdot 49 \\ &= 3 \cdot 84 - 5 \cdot (301 - 3 \cdot 84) = 18 \cdot 84 - 5 \cdot 301. \end{aligned}$$

5. (a) Välja sex bland fjorton kan göras på

$$\binom{14}{6} = 3003$$

   olika sätt.

   (b) Välja tre pojkar bland åtta kan göras på

$$\binom{8}{3} = 56$$

   olika sätt och välja tre flickor bland sex kan göras på

$$\binom{6}{3} = 20$$

   olika sätt. Totalt blir det $56 \cdot 20 = 1120$ olika sätt.

(c) Det är snabbast att räkna ut de varianter som inte är tillåtna och subtrahera detta från svaret i a-uppgiften. De som inte är tillåtna är med en pojke eller ingen pojke.

En pojke kan väljas på 8 sätt och sedan kan man välja fem flickor på

$$\binom{6}{5} = 6$$

olika sätt. Totalt $8 \cdot 6 = 48$ varianter med en pojke. Ingen pojke kan väljas på bara 1 sätt eftersom då måste man välja alla de sex flickorna.

Svaret på uppgiften blir alltså $3003 - 48 - 1 = 2954$.

6. Vi gör ett induktionsbevis och börjar med att kontrollera två (eftersom det är två startvärden på rekursionen) basfall:

$$3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = F(0) \text{ och } 3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1 = F(1).$$

Stämmer alltså för $n = 0$ och $n = 1$.

Induktionssteg. Antag att påståendet gäller för alla k med $0 \leq k < n$ där $n \geq 2$, dvs $F(k) = 3^k - 2^k$. Vi ska visa att i så fall gäller det också för n, d v s $F(n) = 3^n - 2^n$. Vi får med hjälp av definitionen av rekursionen samt antagandet att

$$\begin{aligned} F(n) &= 5F(n-1) - 6F(n-2) = 5(3^{n-1} - 2^{n-1}) - 6(3^{n-2} - 2^{n-2}) \\ &= (5 \cdot 3 - 6)3^{n-2} + (6 - 5 \cdot 2)2^{n-2} = 9 \cdot 3^{n-2} - 4 \cdot 2^{n-2} = 3^n - 2^n. \end{aligned}$$

Med stöd av basfallen och induktionssteget samt principen om total induktion så gäller nu att $F(n) = 3^n - 2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

7. Den är reflexiv om och endast om $x \equiv x + 3 \pmod{n}$, dvs $n \mid (x + 3) - x$, dvs $n \mid 3$, dvs $n = 3$.

För symmetri, antag att xRy och undersök när detta medför att yRx dvs $y \equiv x+3 \pmod{n}$. Om xRy gäller $x \equiv y+3 \pmod{n}$, och då är $x+3 \equiv y+6 \pmod{n}$, så $y \equiv x + 3 \pmod{n}$ om och endast om $y \equiv y + 6 \pmod{n}$, dvs $n \mid (y + 6) - y$, dvs $n \mid 6$, dvs $n = 2$ eller $n = 3$ eller $n = 6$.

För transitivitet, antag att xRy och yRz och undersök när detta medför att xRz dvs $x \equiv z+3 \pmod{n}$. Om xRy och yRz gäller $x \equiv y+3 \pmod{n}$, och $y \equiv z+3 \pmod{n}$, och då är $x \equiv z+6 \pmod{n}$. Det medför att $x \equiv z+3 \pmod{n}$ om och endast om $z+6 \equiv z+3 \pmod{n}$, dvs $n \mid (z+3)-(z+6)$, dvs $n \mid -3$, dvs $n = 3$. (Fotnot: när $n = 3$ är relationen inget annat än kongruens modulo 3.)

8. Vi får att

$$\begin{aligned} ababab &= a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b \\ &= a(10^5 + 10^3 + 10) + b(10^4 + 10^2 + 1) \\ &= 10a(10^4 + 10^2 + 1) + b(10^4 + 10^2 + 1) \\ &= (10^4 + 10^2 + 1)(10a + b) = 10101(10a + b). \end{aligned}$$

Om vi gjorde rätt i uppgift 4a så noterade vi att $3, 7, 13$ och 37 alla delade 10101 som är precis produkten av dessa fyra primtal. Vi får alltså nu att alla dessa fyra primtal delar *ababab*. (Valet av 10101 i uppgift 4 var helt enkelt en liten subtil ledtråd till denna uppgiften. Inte så stor kanske, men alltid något.)