

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.

Datum: 2016-01-04.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Anna Persson, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

1. (a) Ge definitionen av att en mängd R med en addition och en multiplikation är en ring.
(b) Ge ett exempel på en ring som *inte* är en kropp. (3p)
2. Formulera och bevisa aritmetikens fundamentalsats. (3p)
3. Formulera definitionerna av att en funktion är injektiv respektive surjektiv. Ge också ett exempel i vart och ett av följande 4 fall på en funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ som är:
 - injektiv och surjektiv
 - injektiv men inte surjektiv
 - inte injektiv men surjektiv
 - varken injektiv eller surjektiv. (3p)
4. (a) Beräkna $\text{SGD}(1254, 789)$.
(b) Bestäm alla lösningar $x, y \in \mathbb{Z}$ till $1254x + 789y = 7$. (3p)
5. (a) Hur många olika "ord" med 9 bokstäver kan man bilda av bokstäverna i ordet KALABALIK?
(b) Hur många av dessa "ord" har inte tre "A" i rad? (3p)
6. Visa att
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$
för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

Var god vänd!

7. Vi definierar en funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ genom

$$\varphi(p, q) = (a, b),$$

där $x^2 + ax + b$ är det unika andragradspolynom med x^2 -koefficient lika med 1 som har p och q som nollställen.

- (a) Är φ injektiv?
- (b) Är φ surjektiv?
- (c) Bestäm alla par (p, q) sådana att $\varphi(p, q) = (p, q)$.

Alla svar måste motiveras.

(4p)

8. Man kan visa att för varje udda primtal p så finns det tal a sådana att $1 < a < p$ och $a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$ samtliga är olika modulo p . Visa t ex med hjälp av detta att ekvationen

$$x^2 \equiv b \pmod{p},$$

för givet $0 < b < p$ antingen har noll eller exakt två lösningar med $0 < x < p$.

(3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 25 januari. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Srivningar kan granskas och hämtas ut alla vardagar kl 11.00-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL!

Stefan.