MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2015-10-26.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Stefan Lemurell, 070-291 70 41.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Låt a och b vara heltal sådana att $sgd(a, b) = 1$ och låt c vara ett tredje heltal. Visa att om $a \mid bc$, så gäller att $a \mid c$. (3p)

2. Låt $(G, \star)$ vara en (kommutativ) grupp och låt $x, y \in G$. Visa att om $x \star y = x$ så är y identiteten i $(G, \star)$. Du får bara använda axiomen för en (kommutativ) grupp och ange också noggrant vilka axiom du använder. (3p)

3. Ge definitionerna av att en relation är symmetrisk, reflexiv respektive transitiv samt att den är en ekvivalensrelation. (Totalt fyra definitioner alltså.) Ge också ett exempel på en ekvivalensrelation på de reella talen, som är sådan att den har oändligt många olika ekvivalensklasser som alla innehåller oändligt många reella tal. (3p)

4. (a) Primtalsfaktorisera 1001.
   (b) Bestäm alla positiva delare till 1001.
   (c) Beräkna $\text{sgd}(1001, 7777)$. (3p)

5. Vi definierar (som vanligt) Fibonacci-talen att vara talföljden F_n som definieras rekursivt genom

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \; n \geq 2. \end{cases}$$

Visa att

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

för alla heltal $n \geq 0$. (3p)

Var god vänd!

6. (a) Hur många udda positiva fyrsiffriga heltal finns det?
   (b) Hur många positiva fyrsiffriga heltal som består av fyra olika siffror och som är delbara med 5 finns det?
   (c) Hur många positiva fyrsiffriga heltal finns det som är sådana att de består av fyra olika siffror som antingen är i växande ordning (som 3489 och 2568) eller i avtagande ordning (som 9843 och 6520?

   För full poäng krävs att man svarar med explicita heltal (dvs inga fakulteter eller dylikt). (4p)

7. Visa att
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$$
   för alla positiva heltal n. (3p)

8. Låt a, b och c vara tre siffror vilka som helst (de behöver inte vara olika) och $abcabc$ betecknar det sexsiffriga talet som har c som ental, b som tiotal, a som hundratal etc. Visa att
$$7 \mid abcabc, \ 11 \mid abcabc \text{ och } 13 \mid abcabc.$$
   (Om $a = 0$ så blir det inte sexsiffrigt, men påståendet gäller då också.) (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade senast den 3 november. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Ett granskningstillfäller kommer att meddelas på kurshemsidan. Därefter kan skrivningar granskas och hämtas ut alla vardagar kl 11.00-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.