Lösning till Envariabelanalys, MMG200:3, 16-08-22

③ $f'(x) = \dots = \frac{(2x+1)(x+2)}{(x+1)^2}e^x$. Teckentabell:

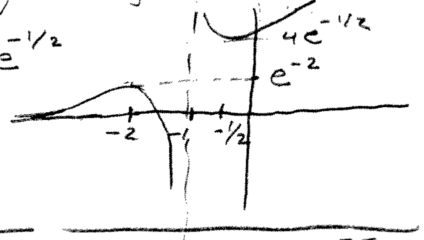
		-2		-1		$-1/2$	
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Lodrät asymptot: $x=-1$.

Vågrät: $y=0$ då $x \to -\infty$

$f(-2) = e^{-2}$, $f(-1/2) = 4e^{-1/2}$

Ingen sned asymptot eftersom $\frac{f(x)}{x} \to \infty$ då $x \to \infty$

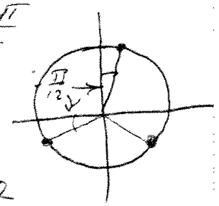


④ Skriv polärt $(re^{i\theta})^3 = -8(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 8e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Det ger $r^3 = 8$ och $3\theta = \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, dvs

$\theta = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, $\theta_1 = \frac{5\pi}{12}$, $\theta_2 = \frac{13\pi}{12}$, $\theta_2 = \frac{7\pi}{4}$

$z_1 = 2e^{i5\pi/12}$, $z_2 = 2e^{i13\pi/12}$, $z_3 = 2e^{i7\pi/4}$



⑤ Sätt $y = x^2$, $x\,dx = \frac{1}{2}dy$, $x = \sqrt{\pi/2} \Rightarrow y = \pi/2$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin y \cos y \, dy = \frac{1}{4}\left[\sin^2 y\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

⑥ kar. ekv. $r^2 - 2r + 2 = 0$, $r = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$.

Homogenlösng $y_h = e^x(A\cos x + B\sin x)$

Partikulärlösning: Ansätt $y_p = a\cos x + b\sin x$

$y' = -a\sin x + b\cos x$ och $y'' = -a\cos x - b\sin x$

Sätt in i ekv. $(a-2b)\cos x + (b+2a)\sin x \equiv 5\sin x$

$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ b + 2a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

<u>Svar</u> $\underline{y = e^x(A\cos x + B\sin x) + 2\cos x + \sin x}$

⑦ $y = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{2}{x}}$, $x \le -2$ $\Leftrightarrow$

$(y + \frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{2}{x}$, $y \ge 1$. Obs, $y = 1$ för $x = -2$.

Vi får $y^2 + xy + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{2}{x} \Leftrightarrow$ {multiplicera med $\frac{x}{y}$! båda $\neq 0$}

$x^2 + yx - \frac{2}{y} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{2}{y}}$

eftersom $-\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{2}{y}} \ge -\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4}} = 0$

och $x \le -2$ var givet. Med andra ord:

$y = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{2}{x}}$, $x \le -2 \Leftrightarrow x = -\frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{2}{y}}$, $y \ge 1$

$\underline{f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{2}{x}}, \quad x \ge 1}$

Vidare är $-\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{2}{x}} \ge 1 + \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{2}{x}} \to \infty$ då $x \to -\infty$

så $V_f = D_{f^{-1}} = [1, \infty)$.

⑧ $x\int_{x^2}^{1} \frac{\arctan(t^2/x^2)}{t^2}dt = \begin{cases} t = xy \\ dt = x\,dy \end{cases}$ $\begin{cases} t = x^2 \Leftrightarrow y = x \\ t = 1 \Leftrightarrow y = 1/x \end{cases}$

$$= \int_x^{1/x} \frac{\arctan y^2}{y^2}dy \to \int_0^{\infty} \frac{\arctan y^2}{y^2}dy$$

som är en konvergent integral eftersom

$\frac{\arctan y^2}{y^2} \begin{cases} \le 1 & \text{för } 0 \le y \le 1 \\ \le \frac{\pi}{2y^2} & \text{för } y \ge 1 \end{cases}$ och

och, som bekant, $\int_1^{\infty} \frac{1}{y^2}dy$ är konvergent.