

## Övningar på serier

1. Beräkna  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5}{4^n}$ .

2. Vilka av följande serier konvergerar?

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2+n}}$ , (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n3^n}$ , (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n}$ ,

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^3+1}$ , (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{1+n^2}$  (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2 2^n}$

3. Avgör om följande serier är absolutkonvergenta, betingat konvergenta eller divergenta.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ , (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , (c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 1/n}$ , (d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 1/n}$ ,

4. För vilka  $x$  konvergerar serierna

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ , (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ , (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ?

5. Vi vet (Eller hur?) att  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Vad är  $\sum_{n=0}^{\infty} D \frac{x^n}{n!}$ ?

6. Låt  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^5 x)}{n^5}$ .

(a) Visa att  $f$  är väldefinierad (dvs. att serien konvergerar).

(b) Konvergerar serien  $\sum_{n=1}^{\infty} D \frac{\cos(n^5 x)}{n^5}$ ?

(c) Är  $f(x)$  deriverbar?

7. (a) Visa att  $\int_{100}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  är konvergent.

(b) Visa att  $\left| \int_{100}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{50}$ .

(c) Konvergerar serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ ?

### Förslag till svar

1.  $\frac{32}{3}$

2. (b), (c), (e) & (f) är konvergenta.

3. (a) & (d) är absolutkonvergenta, (b) betingat konvergent, (c) divergent

4. Då (a)  $-1 \leq x \leq 1$ , (b)  $-1 \leq x < 1$ , (c)  $-1 < x < 1$

5.  $e^x$

6. (b) Nej, (c) Nej

7. (c) Ja