Lösningar, Envariabelanalys, MMG200

Fredag den 15 januari 2016

1. Se kurslitteraturen.

2. (a) Se kurslitteraturen.

   (b) $\cos\frac{1}{x}$ är kontinuerlig så integralkalkylens medelvärdessats ger

$$\int_x^{x+1} \cos\frac{1}{t}dt = \cos\frac{1}{\xi}$$

   där ξ ligger mellan x och $x+1$. Speciellt så $\xi \to \infty$ när $x \to \infty$ och vi får

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+1} \cos\frac{1}{t}dt = \lim_{\xi\to\infty} \cos\frac{1}{\xi} = 1\ .$$

3.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx \\
&\quad = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x}, x=t^2, dx=2tdt \\ 0\mapsto 0, \infty\mapsto\infty \end{bmatrix} = 2\int_0^\infty t^2e^{-t}dt \\
&= \begin{pmatrix} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{pmatrix} = 2\left([-t^2e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty 2te^{-t}dt\right) \\
&\quad = \begin{pmatrix} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{pmatrix} = 4\left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt\right) \\
&\quad = 4[-e^{-t}]_0^\infty = 4\ .
\end{aligned}$$

4. Funktionen är definierad då $x \neq -2$. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2+5)}{(x+2)^2}\cdots = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}\ .$$

   Vi får följande teckentabell

x		-5		-2		1	
y'	$++$	0	$--$	ej def.	$--$	0	$++$
y	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	2 min	$\nearrow$

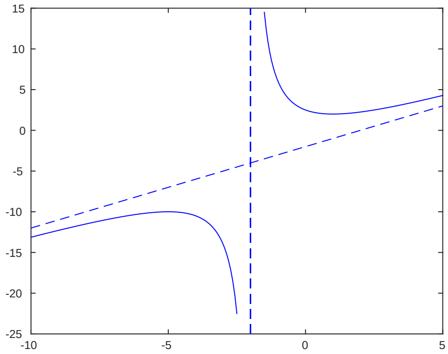
Alltså har f ett lokalt maximum -10 då $x = -5$, och ett lokalt minimum 2 då $x = 1$.

Eftersom $\lim_{x \to -2+} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x \to -2-} f(x) = -\infty$ är $x = 2$ en lodrät asymptot.

Polynomdivision ger

$$f(x) = x - 2 + \frac{5}{x+2}$$

Så $f(x) - (x - 2) \to 0, x \to \infty$ och alltså är linjen $y = x - 2$ en sned asymptot.



5. Funktionen är kontinuerlig om $x \neq 1$. För att avgöra om den är kontinuerlig då $x = 1$ beräknar vi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$. Vi har

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x - 1} .$$

Vi sätter $x = 1 + h$ Då $x \to 1$ gäller $h \to 0$ så

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \frac{1}{2} .$$

Den sista likheten följer eftersom gränsvärdet, per definition, är derivatan av funktionen $\ln(1 + x)$ i punkten $x = 1$.

Vi har alltså visat $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2} \neq 1 = f(1)$ så $f(x)$ är inte kontinuerlig när $x = 1$.

6. Vi har $p(z) = z^3 - (2+i)z^2 - (1-3i)z + 2 - 2i = z^3 - 2z^2 - z + 2 - i(z^2 - 3z + 2)$. Eftersom $z = 1$ är ett nollställe kan vi faktorisera ut $z - 1$ och får $p(z) = (z-1)(z^2 - z - 2 - i(z-2))$. Nu har $z^2 - z - 2$ nollstället $z = 2$ och $z^2 - z - 2 = (z-2)(z+1)$. Detta ger $p(z) = (z-1)((z-2)(z+1)) - i(z-2)) = (z-1)(z-2)(z-(i-1))$. De tre lösningarna är alltså $z = 1$, $z = 2$ och $z = i - 1$.

7. Anm. Det har blivit ett "tryckfel" i formuleringen. Tanken var att lösa $y'' + 2y' + 2y = x^2$ och här kommer en lösning av denna uppgift. (Lösning I.) En lösning av den uppgift som ni fick kommer efteråt. (Lösning II.)

Lösning I. Vi löser först den homogena ekvationen $y'' + 2y' + 2y = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1 = 0$ med rötterna $r = -1 \pm i$. Så lösningen är $y_h = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$.

För att bestämma en particulärlösning ansätter vi $y = ax^2 + bx + c$. Då är $y' = 2ax + b$ och $y'' = 2a$. Så $y'' + 2y' + 2 = 2a + 4ax + 4b + ax^2 + bx + c = x^2$. identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + 2b = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \end{cases} ,$$

vilket ger $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ och $c = -\frac{1}{2}$. Alltså är $y_p = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1)$ en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är alltså $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1)$. Derivering ger $y' = e^{-x}((-A+B)\cos x - (A+B)\sin x) + x - 1$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $A - \frac{1}{2} = 1$ så $A = \frac{3}{2}$. Villkoret $y'(0) = 0$ ger $-A + B - 1 = 0$ och $B = A + 1 = \frac{5}{2}$.

Den sökta lösningen är alltså $y(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(3\cos x + 5\sin x + x^2 - 2x - 1)$.

Lösning II. Om vi låter $z = y'$ har vi $z' + z = x^2 - 2$. Multiplikation med den integrerande faktorn e^x ger $(e^x z)' = (x^2 - 2)e^x$. Partiell integration ger

$$e^x z = \int (x^2 - 2)e^x dx = (x^2 - 2)e^x - \int 2xe^x dx$$

$$= (x^2 - 2)e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = (x^2 - 2x)e^x + C \ .$$

Villkoret $y'(0) = z(0) = 0$ ger $C = 0$. Vi får $y' = z = x^2 - 2x$. Integration ger $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + D$. Slutligen ger $y(0) = 1$ att $D = 1$. Den sökta lösningen är $y(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1$.

8. Vi har $\sqrt[4]{x^4 + x^3} - x = x(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} - 1)$. Så med $t = \frac{1}{x}$ får vi $\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^4 + x^3} - x = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(\sqrt[4]{1+t} - 1)$.

   Vi Taylorutvecklar $f(t) = \sqrt[4]{1+t}$. $f(0) = 1$ och eftersom $f'(t) = \frac{1}{4}(1+t)^{-3/4}$ är $f'(0) = \frac{1}{4}$. Så $f(t) = 1 + \frac{1}{4}t + \mathcal{O}(t^2), t \to 0$. Slutligen får vi

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^4 + x^3} - x = \lim_{t\to 0+} \frac{\sqrt[4]{1+t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{1}{4}t + \mathcal{O}(t^2)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{4} + \mathcal{O}(t) = \frac{1}{4}\ .$$