

Tentamen i Envariabelanalys, MMG200

Måndag den 4 april 2016, 08³⁰ – 12³⁰

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng utom uppgift 2 som kan ge fyra poäng.

1. Formulera Medelvårdessatsen och bevisa den i fallet $f(a) = f(b)$.
2. (a) Formulera intervallinkapslingssatsen.
(b) Formulera satsen om mellanliggande värde.
(c) Bevisa satsen om mellanliggande värde.
(Du får använda intervallinkapslingssatsen utan bevis.)
3. Beräkna följande gränsvärden

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\arctan x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x/2}}{1 - e^{x/3}}.$$

4. Bestäm tangent och normal till kurva $y = \arctan(e^x)$ i den punkt där $x = 0$.
5. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

6. Motivera att $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ har ett största och ett minsta värde, samt bestäm dessa.

Rita kurvan i sina huvuddrag.

Vänd!

7. Vilken eller vilka av följande serier är konvergenta?

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n}$$

Motivera ditt svar!

8. Ett (sfäriskt) hagelkorn tillväxer genom att vattenånga i molnet fastnar på haglets yta. Volymökningen hos haglet är proportionell mot hagelkornets area. Från början är hagelkornets volym $0,1 \text{ mm}^3$ och efter 15 minuter har den ökat till $0,8 \text{ mm}^3$. Hur lång tid tar det tills volymen har ökat till $2,7 \text{ mm}^3$?