MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2017-01-02.

1. Se boken sidorna 122, 125 och 134.
2. (a) Se boken sidorna 215-216 och 218.

   (b) Se boken sidan 219.
3. Se boken sidorna 77-78.
4. (a) Vi ser att 12103 inte är delbart med 2 (udda), 3 (siffersumman är 7 som inte är delbart med 3) eller 5 (slutar inte på 0 eller 5). Om man dividerar med 7 så ser man att $12103 = 7 \cdot 1729$. Testar man återigen att dividera resterande 1729 med 7 så finner man att det åter går jämt ut och att $1729 = 7 \cdot 247$. Nu är 247 varken delbart med 7 eller 11, men division med 13 går jämnt ut och vi får $247 = 13 \cdot 19$. Nu är 19 ett primtal och vi är klara och får

   $$12103 = 7^2 \cdot 13 \cdot 19.$$

   (b) Varje positiv delare till 12103 har en primtalsfaktorisering på formen

   $$7^i \cdot 13^j \cdot 19^k, \text{ med } 0 \le i \le 2,\ 0 \le j \le 1 \text{ och } 0 \le k \le 1.$$

   Vi får 3 möjligheter för i och 2 för j och k. Multiplikationsprincipen ger totalt $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ positiva delare.
5. (a) Det handlar om att välja ut 3 av 4 tvåor och sedan 2 bland de 48 som inte är tvåor och detta kan göras på

   $$\binom{4}{3} = 4 \text{ respektive } \binom{48}{2} = \frac{48 \cdot 47}{2} = 24 \cdot 47 = 1128.$$

   sätt. Dessa val är oberoende av varandra och multiplikationsprincipen ger att totala antalet är produkten av dessa, d v s $4 \cdot 1128 = 4512$.

   (b) Först ska vi välja vilken valör som det ska vara 3 av och sedan vilken det ska vara 2 av. Det blir 13 möjligheter först och sedan 12 så totalt $13 \cdot 12 = 156$ olika sätt att välja vilka valörer det ska vara. (Det blir ju annorlunda om valörerna byter plats så ordningen spelar roll.) Nu ska man också välja olika svit (färg) för de olika korten. För den med 3 kort ska man välja 3 bland 4 och för den med 2 ska man välja 2 bland 4. Samtliga dessa kommer att ge olika händer och valen av sviter är oberoende av varandra så multiplikationsprincipen ger att det totala antalet är

   $$156 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2} = 156 \cdot 4 \cdot 6 = 624 \cdot 6 = 3744.$$

(c) Det finns olika sätt att tänka, men enklast är nog att först välja de 5 olika valörerna. Det kan man göra på

$$\binom{13}{5} = 13 \cdot 11 \cdot 9.$$

För var och en av valörerna har man sedan 4 möjliga kort. Totalt blir det alltså

$$13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 4^5 = 13 \cdot 11 \cdot 3^2 \cdot 2^{10}.$$

6. Vi gör ett induktionsbevis över n.

Basfallet är $n = 1$. Då får vi

$$\sum_{k=1}^{1} (3k(k-1)+1) = 3 \cdot 1 \cdot (1-1) + 1 = 1 \text{ och } 1^3 = 1$$

så det stämmer då $n = 1$.

Induktionssteg. Antag att likheten gäller för något $n = m$. Visa att i så fall gäller det också för $n = m + 1$, d v s

$$\sum_{k=1}^{m+1} (3k(k-1)+1) = (m+1)^3.$$

Vi utnyttjar vårt antagande och får

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} (3k(k-1)+1) &= \sum_{k=1}^{m} (3k(k-1)+1) + 3(m+1)(m+1-1) + 1 \\ &= m^3 + 3(m+1)m + 1 \\ &= m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3.\end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla $n \geq 1$.

7. (a) Vi har att

$$[x]_n = [y]_n \iff n \mid (x-y).$$

Eftersom $pq \mid n$ implicerar att $p \mid n$ och $q \mid n$, så får vi att

$$\begin{aligned}[x]_{pq} = [y]_{pq} &\iff pq \mid (x-y) \implies p \mid (x-y) \text{ och } q \mid (x-y) \\ &\iff [x]_p = [y]_p \text{ och } [x]_q = [y]_q \\ &\iff ([x]_p, [x]_q) = ([y]_p, [y]_q) \iff f([x]_{pq}) = f([y]_{pq}).\end{aligned} \tag{1}$$

Därmed har vi visat att den inte beror på val av representant.

(b) Observera först att $|\mathbb{Z}_n| = n$ och $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ så

$$|\mathbb{Z}_{pq}| = pq = |\mathbb{Z}_p| \cdot |\mathbb{Z}_q| = |\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q|.$$

Det räcker alltså att visa antingen att den är injektiv eller surjektiv, eftersom den automatiskt kommer att ha den andra egenskapen också då antalet element är lika. Vi väljer att visa att den är injektiv.

Vi ska visa att $f([x]_{pq}) = f([y]_{pq}) \Longrightarrow [x]_{pq} = [y]_{pq}$. Detta är omvändningen till det vi visade i första deluppgiften. Vi ser att i kalkylen (1) är det bara ett steg som är en implikation och inte en ekvivalens. Det räcker alltså att motivera att

$$p \mid (x-y) \text{ och } q \mid (x-y) \Longrightarrow pq \mid (x-y)$$

om $\operatorname{sgd}(p,q) = 1$. Men $p \mid (x-y)$ och $q \mid (x-y)$ ger att $x-y$ innehåller alla p:s och q:s primtalsfaktorer och eftersom p och q inte har några gemensamma primtalsfaktorer ($\operatorname{sgd}(p,q) = 1$) så kommer $x-y$ innehålla alla pq:s primtalsfaktorer och alltså $pq \mid (x-y)$. Därmed har vi visat att f är injektiv och därmed bijektiv.

8. Vi ska alltså visa att $4^n - 1$ aldrig delar $5^n - 1$. Först observerar vi att

$$4^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

så att $3 \mid 4^n - 1$ alltid. Så om $4^n - 1$ ska dela $5^n - 1$ så måste $3 \mid 5^n - 1$. Modulo 3 så är $5^n \equiv 2$ om n är udda och $5^n \equiv 1$ om n är jämnt. Det betyder att $3 \mid 5^n - 1$ bara om n är jämnt, och vi har visat att $4^n - 1$ aldrig delar $5^n - 1$ om n är udda. Återstår att visa att det inte heller gäller då $n = 2m$ är jämnt.

Om $n = 2m$, så får vi att

$$4^{2m} - 1 = \left(4^2\right)^m - 1 = 16^m - 1 \equiv 1^m - 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

Alltså gäller att 5 delar $4^n - 1$ när n är jämnt, men uppenbarligen delar inte 5 talet $5^n - 1 \equiv 4 \pmod 5$. Därmed kan inte $4^n - 1$ dela $5^n - 1$ om n är jämnt heller och beviset är klart.